Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО»

Факультет экономический
Кафедра информационных технологий

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой
_____О.Б.Хорошко
29.05. 2026 г.

СОГЛАСОВАНО
Декан факультета
_____А.В.Ковтунов
07.07 2026 г.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

для специальности 6-05-0611-01 Информационные системы и технологии

Составители: Г.Е.Хурсевич, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры информационных технологий учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»

Рассмотрен и рекомендован к утверждению на заседании кафедры информационных технологий учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет МИТСО»
29.05.26, протокол № 11;

Утвержден на заседании научно-методического совета учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет МИТСО»
07.07.26, протокол № 6;

РЕЦЕНЗЕНТЫ:
кафедра физики и методики преподавания физики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»;
О.М.Михалкович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»

Регистрационный № УД-084-26/7

Регистрационное свидетельство № 1272647967 от 20.07.2026

АКТУАЛИЗИРОВАН
заседание кафедры _____
_____ учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет МИТСО»
_____20_____, протокол №_____

заседание научно-методического совета учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»
_____ 20__ г., протокол № ___

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА 5
УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА 6
I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ 26
1. Линейное программирование 26
1.1. Примеры задач линейного программирования. Формы записи задач линейного программирования 26
1.2. Геометрия задачи линейного программирования. Графический метод решения 32
1.3. Симплексный метод решения задач линейного программирования 36
1.4. Метод искусственного базиса (*M*-метод) 49
2. Двойственные задачи в линейном программировании 56
2.1. Понятие двойственности. Построение пары взаимно двойственных задач 56
2.2. Теоремы двойственности 59
3. Транспортная задача 68
3.1. Постановка транспортной задачи по критерию стоимости и построение ее начального опорного плана 68
3.2. Метод потенциалов 77
4. Целочисленное программирование 86
5. Параметрическое программирование 87
6. Дробно-линейное программирование 88
II. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ 90
МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ 90
1. Задачи линейного программирования. формы записи задач линейного программирования 90
2. Решение задач линейного программирования геометрическим (графическим) методом 99
3. Симплексный метод решения задач линейного программирования . 110
4. Метод искусственного базиса (М-метод) 130
5. Двойственные задачи в линейном программировании 138
6. Транспортная задача 154
7. Метод потенциалов 168
8. Целочисленное программированиЕ 175

9. Параметрическое программирование 175
10. Дробно-линейное программирование 177
III. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ 179
Тестовые задания 179
1. Графический метод 179
2. Транспортная задача 180
Задания для проведения контроля 181
Темы рефератов 182
Задания для контрольных работ 183
1. Линейное программирование 183
2. Двойственные задачи в линейном программировании 183
3. Транспортная задача 184
Перечень вопросов промежуточной аттестации (экзамен) 185
IV. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ 188
Перечень рекомендуемой литературы 188

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Математический анализ» изучается студентами специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии» на протяжении первых двух семестров обучения в университете.

Цель ЭУМК – управление и самоуправление учебной деятельность по развитию компетентностей обучающихся в процессе освоения ими учебной дисциплины «Математический анализ».

ЭУМК раскрывает требования к содержанию изучаемой дисциплины, к образовательным результатам и средствам их достижения и оценки; обеспечивает эффективное освоение обучающимися учебного материала; является средством управления самостоятельной работы обучающихся.

Основными структурными элементами ЭУМК являются:

учебная программа по дисциплине;

теоретический раздел, включающий лекционные материалы по дисциплине;

практический раздел, содержащий материал для проведения практических занятий;

раздел контроля знаний, содержащий задания для управляемой самостоятельной работы студентов; тестовые задания по высшей математике, которые охватывают основные типы задач указанной дисциплины, и материалы для проведения контрольных работ по разделам изучаемой студентами учебной дисциплины;

вспомогательный раздел, в котором приведен перечень рекомендуемой литературы.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК. Освоение материала по каждому из рассматриваемых разделов рекомендуется начинать с изучения соответствующего лекционного материала (теоретический раздел), после чего следует проработать решенные задачи и примеры, которые можно назвать типовыми. Ознакомление с ними позволит обучающемуся при самой минимальной помощи со стороны преподавателя овладеть основными методами решения задач изучаемого раздела. Далее можно перейти к самостоятельному решению предложенных упражнений и заданий (практический раздел).

Задания для управляемой самостоятельной работы студентов (Раздел контроля знаний) позволят преподавателю организовать эффективную самостоятельную работу обучающихся по дисциплине «Математический анализ».

Для проверки знаний студентов ЭУМК содержит тестовые задания и материалы для проведения контрольных работ («Раздел контроля знаний»).

Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
учреждения образования
Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО»
_____ М.А.Юрочкин
_____ 2024 г.
Регистрационный № УД-063/02-24/уч.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности**

6-05-0611-01 Информационные системы и технологии

2024 г.

Контрольный экземпляр

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта (образовательных стандартов) ОСВО 6-05-0611-01-2023 (общее высшее образование), для специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии», утвержденного Постановлением Министерства образования Республики Беларусь 10.08.2023 г. № 246, примерной учебной программы «Математическое программирование» утвержденной 28.10.2024 г. регистрационный № 6-05-06-072/пр. и учебного плана учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО» по специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии», утвержденного 01.03.2023 рег. № 6-05-0611-01/уч.

СОСТАВИТЕЛЬ:
Г.Е.Хурсевич. профессор кафедры информационных технологий учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:
Кафедрой информационных технологий учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»
(протокол № 4 от 28.11.2024);

Научно-методическим советом учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»
(протокол № 3 от 20.12.2024)

СОГЛАСОВАНО
Декан экономического факультета _____А.В.Ковтунов

Заведующий библиотекой _____О.О.Бабарикина

Нормоконтроль
ведущий специалист УМУ
_____Г.Д.Лагунович

I. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Математическое программирование» обеспечивает подготовку специалистов по специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии».

Учебная дисциплина «Математическое программирование» включает в свой состав темы, представляющие собой важную составляющую для профессиональной деятельности инженера-экономиста. Например, рассмотренные математические модели описывают различные экономические процессы, а для решения и анализа их применяются методы оптимизации.

Воспитательное значение учебной дисциплины «Математическое программирование» заключается в формировании у обучающихся математической культуры и научного мировоззрения; развитии исследовательских умений, аналитических способностей, креативности, необходимых для решения научных и практических задач; развитии познавательных способностей и активности: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности; формировании способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Изучение данной учебной дисциплины способствует созданию условий для формирования интеллектуально развитой личности обучающегося, которой присущи стремление к профессиональному совершенствованию, активному участию в экономической и социально-культурной жизни страны, гражданская ответственность и патриотизм.

Для изучения учебной дисциплины «Математическое программирование» необходимо усвоение таких учебных дисциплин, как «Математический анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

В свою очередь учебная дисциплина «Математическое программирование» должна дать будущему специалисту знания по использованию математического моделирования при решении задач оптимизации экономического содержания, возникающих на практике. Полученные знания и навыки создадут основу при освоении учебных дисциплин экономического блока, при выполнении курсовых работ и дипломного проекта, а также в дальнейшей работе по специальности.

Целью изучения учебной дисциплины «Математическое программирование» является подготовка специалиста с логическим и алгоритмическим мышлением, который будет владеть основными методами исследования и оптимизации прикладных задач.

Задачи учебной дисциплины:

сформировать у студентов знания об основных математических моделях и методах решения задач математического программирования, а также научить применять полученные знания при решении задач экономического и финансового содержания;

ознакомить с основными задачами линейного программирования и их свойствами;

обеспечить изучение основных базовых понятий теории математического

программирования и терминологии;

обучить различным методам решения поставленных задач математического программирования;

сформировать базовые навыки математического моделирования и использования их при решении и анализе задач оптимизации с экономическим содержанием на языке матриц;

содействовать развитию научного мировоззрения у студентов.

Освоение учебной дисциплины «Математическое программирование» должно обеспечить у обучающихся формирование **базовых профессиональных компетенций**: применять методы математического программирования в инженерной деятельности и проектировании информационных систем

В результате изучения дисциплины обучающиеся должны

знать:

основные методы решения задач математического программирования при решении прикладных задач, области их применения;

принципы логического мышления, основные алгоритмы и методы математического моделирования;

методики математического исследования прикладных задач;

уметь:

строить математические модели задач с экономическим содержанием;

проводить математический анализ прикладных задач с инженерно-экономическим содержанием;

исследовать оптимизационные задачи методами математического программирования с использованием компьютерных технологий;

проводить расчеты, получать численные результаты, уметь анализировать полученные данные и делать соответствующие выводы.

иметь навыки:

применения методов математического программирования при решении математических и инженерно-экономических задач;

творческого аналитического мышления, составления и исследования математических моделей и основ математического моделирования с использованием современных прикладных пакетов программ.

Распределение аудиторных часов по видам занятий и семестрам.
Формы промежуточной аттестации

Семестр	Количество академических часов							Самостоят. работа	Форма промежуточной аттестации
	Всего	Ауд.	Из них						
			Лекции	Лаборатор. занятия	Практиче. занятия	Семинар. занятия	УСР[1]		
Очная форма получения высшего образования									
4	108	52	16	16	14		6	56	экз.
Всего	108	52	16	16	14		6	56	экз.

[1] Управляемая самостоятельная работа

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Введение. Предмет математического программирования

Предмет и метод математического программирования. Понятия «модель» и «моделирование». Сущность процесса моделирования. Общие принципы построения моделей. Классификация задач математического программирования. Математическая формулировка задачи математического программирования. Формы записи задач математического программирования: общая, симметрические задачи, каноническая задача, векторно-матричная форма записи.

Тема 2. Линейное программирование

Постановка задачи линейного программирования (ЛП). Матричная форма записи задач линейного программирования. Каноническая и симметрическая запись задачи ЛП. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования.

Тема 3. Симплекс-метод

Симплекс-метод. Симплексные таблицы. Теоремы симплекс-метода. Метод искусственного базиса. Теорема о конечности симплекс-метода. Экономическая интерпретация элементов симплекс-таблицы.

Тема 4. Двойственность в линейном программировании

Понятие двойственности. Построение двойственных задач и их экономическая интерпретация. Свойства двойственных задач. Теорема о разрешимости двойственных задач. Критерий оптимальности планов двойственных задач. Двойственный симплекс-метод. Задача планирования технологий. Задача планирования уровней производства. Применение пакета прикладных программ QSBR и Excel для решения задач линейного программирования.

Тема 5. Транспортная задача

Постановка транспортной задачи. Математическая модель транспортной задачи. Транспортная задача по критерию стоимости и задачи транспортного типа с максимизацией и минимизацией целевой функции. Закрытая и открытая модель транспортной задачи. Методы построения начального опорного плана решения. Метод потенциалов для нахождения оптимального плана. Основные теоремы. Транспортная задача с дополнительными условиями. Транспортная задача на сетях. Применение пакета прикладных программ QSBR и Excel для решения транспортных задач.

Тема 6. Целочисленное программирование

Постановка задач целочисленного программирования: общая задача о расписании, задача коммивояжера, задачи о разбиении, покрытии и упаковке, задача о размещении оборудования, задача раскроя. Методы ветвей и границ. Методы отсечений.

Тема 7. Нелинейное программирование

Задачи нелинейного программирования. Постановка задачи нелинейного программирования и ее геометрическая интерпретация. Метод множителей Лагранжа. Экономический смысл множителей Лагранжа. Выпуклые и вогнутые функции. Задачи выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера. Понятие о локальном и глобальном оптимуме. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования. Приближенные методы решения задач нелинейного программирования с сепарабельными функциями. Квадратичное программирование. Применение пакетов прикладных программ решения задач нелинейного программирования.

Тема 8. Динамическое программирование

Основные понятия. Принцип оптимальности Беллмана, функция Беллмана. Вычислительная схема метода динамического программирования. Примеры задач динамического программирования. Принципы динамического программирования и уравнения Беллмана. Решение экономических задач методом динамического программирования. Динамические задачи выбора наиболее рационального маршрута доставки груза, оптимального распределения средств на расширение производства, определения оптимальной стратегии замены оборудования, формирования оптимальной программы производства с учетом запасов. Сетевое моделирование. Применение пакета Network Optimization (сетевой оптимизации) для выбора наиболее экономичного маршрута доставки груза.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер темы	Название темы	Всего часов	Количество аудиторных часов					Самостоятельная работа	Литература	Форма контроля
			Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСР			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
4 семестр										
1.	Введение. Предмет математического программирования	10	2			2		6	[1, с.5-17]	УО
2.	Линейное программирование	15	2	2		2	1	8	[1, с.17-26]	РПЗ
3.	Симплекс-метод	19	4	2		4	1	8	[1, с.27-46, 47-57]	ЗТТ(ТА)
4.	Двойственность в линейном программировании	13	2	2		2	1	6	[1, с.58-77]	РПЗ, К
5.	Транспортная задача	13	2	2		2	1	6	[1, с.78-102]	КР
6.	Целочисленное программирование	8		2				6	[3], [4]	ПО
7.	Нелинейное программирование	15	2	2		2	1	8	[3], [4]	РПЗ, ДК
8.	Динамическое программирование	15	2	2		2	1	8	[3], [4]	Р
	Всего по дисциплине	**108**	**16**	**14**		**16**	**6**	**56**		**экз.**

IV. ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Шилинец, В. А. Практикум по высшей математике : учеб.-метод. пособие / В. А. Шилинец [и др.]. – Минск : МИТСО, 2021. – Ч. 4. – 103 с.

2. Читая, Г. О. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Г. О. Читая [и др.] ; под ред. Г. О. Читая, С. Ф. Миксюк. – Минск : Белорус. гос. экономич. ун-т, 2018. – 510, [1] с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

3. Абрамов, Л. М. Математическое программирование : учеб. пособие для студентов вузов / Л. М. Абрамов, В. Ф. Капустин. – Ленинград : Изд-во Ленинград. ун-та, 1981. – 327 с.

4. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М. : Высш. шк., 1976. – 352 с.

5. Калихман, И. Л. Сборник задач поматематическому программированию : учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов / И. Л. Калихман. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1976. – 352 с.

6. Ганичева, А. В. Математическое программирование : учеб. пособие для СПО / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев. – СПб. : Лань, 2022. – 88 с.

7. Болотский, А. В. Математическое программирование и теория игр : учебное пособие для вузов / А. В. Болотский. – СПб. : Лань, 2022. –116 с.

8. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие / И. Л. Акулич. – СПб. : Лань, 2024. – 348 с.

9. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – СПб. : Лань, 2013. – 352 с.

10. Балдин, К. В. Математическое программирование : учебник / К. В. Балдин, Н. А. Брызгалов. – М. : Дашков и К, 2016. – 218 с.

11. Котов, В. П. Математическое программирование : учеб. пособие / В. П. Котов, Н. А. Адрицкая [и др.]. – СПб. : Лань, 2014. – 432 с.

12. Семакин, И. Г. Программирование, численные методы и математическое моделирование (для бакалавров) / И. Г. Семакин, О. Л. Русакова, Е. Л. Тарунин. – М. : КноРус, 2018. – 288 с.

13. Балдин, К. В. Математическое программирование : учебник / К. В. Балдин, Н. А. Брызгалов, А. В. Рукосуев. – М. : Дашков и К, 2013. – 220 с.

14. Юденков, А. В. Математическое программирование в экономике : учебное пособие / А. В. Юденков. – М. : Финансы и статистика, 2010. – 240 с.

15. Димитрин, Ю. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие / Ю. Димитрин. – СПб. : Лань П, 2016. – 352 с.

16. Юрьева, А. А. Математическое программирование : учеб. пособие / А. А. Юрьева. – СПб. : Лань, 2014. – 432 с.

СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ

1. Система дистанционного обучения "Moodle".
2. Электронный учебно-методический комплекс «Математическое программирование», автор-составитель Г.Е.Хурсевич.
3. Перечень компьютерных программ: пакет анализа Exsel; пакеты Mathcad, MATLAB, пакет Network Optimization (сетевой оптимизации).

СРЕДСТВА ДИАГНОСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Диагностика результатов образовательной деятельности обучающихся осуществляется в ходе проведения всех видов занятий, самостоятельной работы и текущей аттестации по учебной дисциплине.

Текущая аттестация обучающихся проводится в течение семестра в целях периодического контроля и оценки результатов их учебной деятельности по учебной дисциплине с выставлением отметок.

Текущий контроль проводится строго в соответствии с учебно-методической картой дисциплины. Обучающийся должен в обязательном порядке участвовать во всех контрольных мероприятиях текущего контроля, предусмотренных учебной программой дисциплины.

Основными **формами контроля** знаний по учебной дисциплине являются:

устный опрос	УО;
письменный опрос (летучка)	ПО;
контрольная работа	КР;
тест (задание тестового типа)	ЗТТ;
решение практических задач	РПЗ.
коллоквиум	К;
реферат	Р;
доклады на конференциях	ДК.

Форма текущей аттестации по учебной дисциплине:

тест (задание тестового типа)	ЗТТ.

К промежуточной аттестации по учебной дисциплине, модулю обучающиеся допускаются при условии успешного прохождения текущей аттестации, предусмотренной учебной программой в текущем семестре.

Формой промежуточной аттестации является:

экзамен	экз.

МЕТОДЫ (ТЕХНОЛОГИИ) ОБУЧЕНИЯ

Основными методами (технологиями) обучения, отвечающие целям и задачам учебной дисциплины являются:

элементы проблемного обучения (проблемное изложение, вариативное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые во время чтения лекций и при проведении консультаций;

элементы учебно-исследовательской деятельности, реализация творческого подхода на практических и лабораторных занятиях.

ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Целью практических занятий является закрепление теоретического курса, приобретение навыков решения задач, активизация самостоятельной работы студентов.

Практическое занятие 1. Тема 2. Линейное программирование

Рассматривается предмет и метод математического программирования, понятия «модель» и «моделирование», сущность процесса моделирования, классификация задач математического программирования, математическая формулировка задачи математического программирования.

Изучаются общие принципы построения моделей, формы записи задач математического программирования: общая, симметрические задачи, каноническая задача, векторно-матричная форма записи.

Отрабатывается постановка задачи линейного программирования (ЛП), матричная форма записи задач линейного программирования, каноническая и симметрическая запись задачи ЛП, геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Практическое занятие 2. Тема 3. Симплекс-метод

Изучается симплекс-метод, построение симплексной таблицы, метод искусственного базиса.

Отрабатывается решение ЗЛП симплексным методом и методом искусственного базиса.

Дается экономическая интерпретация элементов симплекс-таблицы.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Практическое занятие 3. Тема 4. Двойственность в линейном программировании

Изучается понятие двойственности, свойства двойственных задач.

Отрабатывается построение двойственных задач и их экономическая интерпретация.

Определяется критерий оптимальности планов двойственных задач.

Изучается двойственный симплекс-метод.

Решаются задачи планирования технологий и планирования уровней производства; прямые и двойственные задачи.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Практическое занятие 4. Тема 5. Транспортная задача

Рассматривается постановка транспортной задачи, построение экономико-математической модели транспортной задачи.

Изучается методы составления плана решения транспортной задачи; транспортная задача по критерию стоимости и задачи транспортного типа с максимизацией и минимизацией целевой функции; закрытая и открытая модель транспортной задачи; алгоритм решения транспортной задачи.

Отрабатываются методы построения начального опорного плана решения, метод северо-западного угла и минимального элемента для нахождения опорного плана. метод потенциалов для нахождения оптимального плана (проверка плана перевозок на оптимальность; улучшение плана перевозок).

Решается транспортная задача с дополнительными условиями и транспортная задача на сетях.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Практическое занятие 5. Тема 6. Целочисленное программирование

Рассматривается постановка задач целочисленного программирования: общая задача о расписании, задача коммивояжера, задачи о разбиении, покрытии и упаковке, задача о размещении оборудования, задача раскроя.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", электронный учебно-методический комплекс «Математическое программирование», автор-составитель Г.Е.Хурсевич.

Практическое занятие 6. Тема 7. Нелинейное программирование

Рассматриваются задачи нелинейного программирования.

Изучается постановка задачи нелинейного программирования и ее геометрическая интерпретация.

Отрабатывается метод множителей Лагранжа.

Определяется экономический смысл множителей Лагранжа.

Рассматриваются выпуклые и вогнутые функции.

Решаются задачи выпуклого программирования.

Отрабатываются градиентные методы решения задач нелинейного программирования и приближенные методы решения задач нелинейного программирования с сепарабельными функциями.

Рассматривается квадратичное программирование.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Практическое занятие 7. Тема 8. Динамическое программирование

Рассматриваются основные понятия, принцип оптимальности Беллмана, функция Беллмана.

Изучается вычислительная схема метода динамического программирования, принципы динамического программирования и уравнения Беллмана.

Решаются задачи динамического программирования: экономические задачи методом динамического программирования, динамические задачи выбора наиболее рационального маршрута доставки груза, оптимального

распределения средств на расширение производства, определения оптимальной стратегии замены оборудования, формирования оптимальной программы производства с учетом запасов.

Рассматривается сетевое моделирование.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

ПЕРЕЧЕНЬ ТЕМ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Основная цель проведения лабораторных занятий состоит в закреплении теоретического материала курса, приобретении навыков выполнения эксперимента, обработки экспериментальных данных, анализа результатов, грамотного оформления отчетов.

Лабораторная работа 1. Тема 1. Введение. Предмет математического программирования

Изучаются общие принципы построения моделей, формы записи задач математического программирования: общая, симметрические задачи, каноническая задача, векторно-матричная форма записи; применение пакета прикладных программ QSBR и Excel для решения задач линейного программирования.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Лабораторная работа 2. Тема 2. Линейное программирование

Изучается геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования.

Отрабатывается применение пакета прикладных программ QSBR и Excel для решения задач линейного программирования.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Лабораторная работа 3. Тема 3. Симплекс-метод

Изучается симплекс-метод, построение симплексной таблицы.

Отрабатывается применение пакета прикладных программ QSBR и Excel для решения задач линейного программирования.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Лабораторная работа 4. Тема 3. Симплекс-метод

Изучается метод искусственного базиса.

Отрабатывается применение пакета прикладных программ QSBR и Excel для решения задач линейного программирования.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Лабораторная работа 5. Тема 4. Двойственность в линейном программировании

Изучается построение двойственных задач.

Отрабатывается решение прямой и двойственной задачи.

Решаются задачи планирования технологий, планирования уровней производства с применением пакета прикладных программ QSBR и Excel.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Лабораторная работа 6. Тема 5. Транспортная задача

Изучается проверка плана перевозок на оптимальность, улучшение плана перевозок; алгоритм решения транспортной задачи.

Отрабатывается применение пакета прикладных программ QSBR и Excel для решения транспортной задачи.

Изучается применение пакета Network Optimization (сетевой оптимизации) для выбора наиболее экономичного маршрута доставки груза.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Лабораторная работа 7. Тема 7. Нелинейное программирование

Изучается применение пакетов прикладных программ решения задач нелинейного программирования.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

Лабораторная работа 8. Тема 8. Динамическое программирование

Отрабатывается сетевое моделирование задачи динамического программирования; применение пакета Network Optimization (сетевой оптимизации) для выбора наиболее экономного маршрута доставки груза.

Обеспеченность занятия: система дистанционного обучения "Moodle", конспект лекций, учебная литература.

ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ УСР

№ темы	Тема УСР	Кол-во часов	Метод. обеспечение	Форма контроля
2 курс 4 семестр (6 часов)				
2	Линейное программирование. Графический метод	1	Интернет-ресурсы	ЗТТ
3	Симплекс-метод	1	Интернет-ресурсы	ЗТТ
4	Двойственность в линейном программировании	1	Интернет-ресурсы	ЗТТ
5	Транспортная задача	1	Интернет-ресурсы	ЗТТ
7	Нелинейное программирование	1	Интернет-ресурсы	ЗТТ, ДК
8	Динамическое программирование	1	Интернет-ресурсы	Р
	Всего по дисциплине	6		

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ УСР (ТЕСТЫ)

1. Примерные задания для УСР

1. Метод Гомори.
2. Транспортная параметрическая задача.
3. Транспортная задача с дополнительными условиями.
4. Экономический анализ задачи оптимального использования ресурсов.
5. Задачи выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера. Понятие о локальном и глобальном оптимуме. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования.
6. Динамические задачи выбора наиболее рационального маршрута доставки груза, оптимального распределения средств на расширение производства, определения оптимальной стратегии замены оборудования, формирования оптимальной программы производства с учетом запасов.

2. Примеры тестовых заданий

Тема: «Линейное программирование. Графический метод»

1. При решении задачи графическим методом перемещается:
а) линия уровня целевой функции;
б) целевая функция;
в) вектор-градиент;
г) сторона многоугольника планов.

2. Вектор – градиент $\overline{C} = (C_1, C_2)$ показывает:
а) направление наискорейшего подъема целевой функции;
б) направление наискорейшего убывания целевой функции;
в) направление наискорейшего возрастания целевой функции;
г) направление наискорейшего спуска целевой функции.

3. Задача линейного программирования будет иметь бесчисленное множество решений если:

а) область допустимых решений является выпуклым незамкнутым многоугольником в направлении оптимизации целевой функции;

б) область допустимых решений есть пустое множество;

в) область допустимых решений является отрезком;

г) область допустимых решений есть невыпуклый многоугольник.

4. Математической моделью задачи называется:

а) отображение объекта;

б) задание в математической форме зависимостей между исходными данными задачи,

в) цикл научных дисциплин;

г) совокупность неизвестных величин.

5. Целевая функция задачи линейной оптимизации достигает экстремального значения:

а) в крайней точке (крайних точках) области допустимых решений системы ограничений;

б) во внутренней точке области допустимых решений системы ограничений;

в) в любой точке области допустимых решений системы ограничений;

г) на границе области допустимых решений.

6. Математическая модель задачи линейной оптимизации может быть записана в следующей форме:

а) симметричной;

б) графической;

в) Лагранжа;

г) числовой.

7. Выберите из следующих утверждений правильное:

а) область допустимых решений задачи линейной оптимизации всегда ограничена;

б) область допустимых решений задачи линейной оптимизации всегда выпукла;

в) область допустимых решений задачи линейной оптимизации может состоять из нескольких разрозненных областей.

г) область допустимых решений задачи линейной оптимизации всегда вогнута.

Тема: «Транспортная задача»

1. В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается перевозка:

а) однородного продукта;

б) разнородных продуктов;

в) разнородных комплектов;

г) всевозможных материалов.

2. Транспортная задача имеет оптимальное решение, если:

а) суммарный запас груза всех поставщиков превышает суммарный спрос потребителей;

б) суммарный запас груза всех поставщиков равен суммарному спросу в этом грузе всех потребителей;

в) суммарный запас груза всех поставщиков меньше суммарного спроса потребителей;

г) суммарный запас груза всех поставщиков и всех потребителей не определен.

3. Переход к нехудшему опорному решению транспортной задачи можно осуществить:

а) методом потенциалов;

б) методом северо-западного угла;

в) методом наименьших квадратов;

г) методом
функциональных уравнений.

4. Если в транспортной задаче суммарный запас грузов поставщиков меньше суммарного спроса потребителей, то:

а) задача не имеет решения;

б) для разрешимости задачи необходимо ввести фиктивного поставщика;

в) для разрешимости задачи необходимо ввести фиктивного потребителя;

г) необходимо уменьшить количество потребителей.

5. Если найдено опорное решение транспортной задачи, то:

а) для каждой свободной клетки этого решения можно образовать единственный цикл;

б) для каждой свободной клетки можно образовать множество циклов;

в) для каждой занятой клетки можно образовать единственный цикл;

г) для каждой свободной клетки нельзя образовать ни одного цикла.

6. Цикл при решении транспортной задачи методом потенциалов содержит:

а) перспективную свободную клетку и часть занятых клеток;

б) перспективную свободную клетку и все занятые клетки;

в) занятую клетку и часть свободных клеток;

г) все свободные клетки.

7. Критерием оптимальности при нахождении минимума функции транспортной задачи служит:

а) неотрицательность характеристик S_{ij} свободных клеток таблицы транспортной задачи;

б) неотрицательность оценок загруженных клеток таблицы транспортной задачи;

в) отрицательность оценок загруженных клеток;

г) равенство нулю потенциалов.

2. Примерные задания для проведения контроля

Вариант 1

1. Цех изготавливает изделия А и Б. Расход сырья, его запас и прибыль от реализации каждого изделия указаны в таблице.

Вид сырья	Расход на изделие		Запас
	А	Б	
S_1	16	4	200
S_2	8	7	280
S_3	5	9	450
Прибыль	4	6	

Найти план производства изделий, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль от их реализации. Задачу решить графическим методом.

2. В четырех хранилищах A_1, A_2, A_3 и A_4 имеется соответственно 40, 50, 60 и 30 т топлива. Требуется спланировать перевозки топлива к трем потребителям B_1, B_2 и B_3, спрос которых соответственно равен 60, 80 и 40 т, так, чтобы затраты на транспортировку были минимальными. Стоимость перевозки 1 т задана матрицей.

4 3 5
6 2 1
7 4 2
5 6 3.

Вариант 2

1. Цех изготавливает изделия А и Б. Расход сырья, его запас и прибыль от реализации каждого изделия указаны в таблице.

Вид сырья	Расход на изделие		Запас
	А	Б	
S_1	32	8	400
S_2	16	14	560
S_3	10	18	900
Прибыль	8	12	

Найти план производства изделий, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль от их реализации. Задачу решить графическим методом.

2. Мелькомбинаты № 1, 2, 3 ежедневно дают соответственно 60, 50 и 45 тонн муки. Составить методом потенциалов оптимальный план перевозки муки четырем хлебозаводам, потребности которых равны 35, 25, 75 и 15 тонн в день. Стоимость перевозки одной тонны муки с мелькомбината № 1 хлебозаводам соответственно равна 3, 2, 4 и 1 д.е., с мелькомбината № 2 – 1, 2, 2, 4 д.е. и с мелькомбината № 3 – 5, 2, 4, 3 д.е.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ (ЭКЗАМЕН)

1. Предмет и метод математического программирования. Понятия «модель» и «моделирование». Сущность процесса моделирования.
2. Общие принципы построения моделей. Классификация задач математического программирования. Математическая формулировка задачи математического программирования.
3. Формы записи задач математического программирования: общая, симметрические задачи, каноническая задача, векторно-матричная форма записи.
4. Постановка задачи линейного программирования (ЛП).
5. Матричная форма записи задач линейного программирования.
6. Каноническая и симметрическая запись задачи ЛП.
7. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования.
8. Симплекс-метод. Симплексные таблицы. Теоремы симплекс-метода.
9. Симплексный метод решения задачи линейного программирования.
10. Метод искусственного базиса решения задачи линейного программирования.
11. Теорема о конечности симплекс-метода.
12. Экономическая интерпретация элементов симплекс-таблицы.
13. Понятие двойственности.
14. Построение двойственных задач и их экономическая интерпретация.
15. Свойства двойственных задач. Теорема о разрешимости двойственных задач.
16. Критерий оптимальности планов двойственных задач.
17. Двойственный симплекс-метод.
18. Задача планирования технологий.
19. Задача планирования уровней производства.
20. Постановка транспортной задачи. Математическая модель транспортной задачи.
21. Методы составления плана решения транспортной задачи.
22. Алгоритм решения транспортной задачи.
23. Транспортная задача по критерию стоимости и задачи транспортного типа с максимизацией и минимизацией целевой функции.
24. Закрытая и открытая модель транспортной задачи.
25. Методы построения начального опорного плана решения.
26. Проверка плана перевозок на оптимальность.
27. Метод потенциалов для нахождения оптимального плана. Основные теоремы.
28. Улучшение плана перевозок.
29. Транспортная задача с дополнительными условиями.
30. Транспортная задача на сетях.
31. Постановка задач целочисленного программирования: общая задача о расписании.

32. Постановка задач целочисленного программирования: задача коммивояжера.

33. Постановка задач целочисленного программирования: задачи о разбиении.

34. Постановка задач целочисленного программирования: о покрытии и упаковке.

35. Постановка задач целочисленного программирования: задача о размещении оборудования.

36. Постановка задач целочисленного программирования: задача раскроя.

37. Методы ветвей и границ. Методы отсечений.

38. Задачи нелинейного программирования.

39. Постановка задачи нелинейного программирования и ее геометрическая интерпретация.

40. Метод множителей Лагранжа.

41. Экономический смысл множителей Лагранжа.

42. Задачи выпуклого программирования.

43. Выпуклые и вогнутые функции. Задачи выпуклого программирования.

44. Теорема Куна-Таккера. Понятие о локальном и глобальном оптимуме.

45. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования.

46. Приближенные методы решения задач нелинейного программирования с сепарабельными функциями.

47. Квадратичное программирование. Применение пакетов прикладных программ решения задач нелинейного программирования.

48. Динамическое программирование. Основные понятия.

49. Принцип оптимальности Беллмана, функция Беллмана.

50. Вычислительная схема метода динамического программирования.

51. Примеры задач динамического программирования.

52. Принципы динамического программирования и уравнения Беллмана.

53. Решение экономических задач методом динамического программирования.

54. Динамические задачи выбора наиболее рационального маршрута доставки груза.

55. Динамические задачи выбора наиболее экономичного распределения средств на расширение производства.

56. Динамические задачи выбора наиболее экономичного определения оптимальной стратегии замены оборудования.

57. Динамические задачи выбора наиболее экономичного определения оптимальной стратегии формирования оптимальной программы производства с учетом запасов.

58. Динамические задачи выбора наиболее экономичного формирования оптимальной программы производства с учетом запасов.

59. Сетевое моделирование. Применение пакета Network Optimization (сетевой оптимизации) для выбора наиболее экономичного маршрута доставки груза.

V. ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Программирование сетевых приложений	информационных технологий	Предложений нет	протокол кафедры информационных технологий № 4 от 28.11.2024
Эконометрика	информационных технологий	Предложений нет	протокол кафедры информационных технологий № 4 от 28.11.2024
Программирование мобильных информационных систем	информационных технологий	Предложений нет	протокол кафедры информационных технологий № 4 от 28.11.2024
Экономико-математические методы и модели	информационных технологий	Предложений нет	протокол кафедры информационных технологий № 4 от 28.11.2024

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Примеры задач линейного программирования. Формы записи задач линейного программирования

Линейное программирование – это математическая дисциплина, изучающая методы нахождения наименьшего (или наибольшего) значения линейной функции нескольких переменных, при условии, что последние удовлетворяют конечному числу линейных уравнений и неравенств.

Эта линейная функция называется *целевой,* а ограничения, записанные в виде уравнений или неравенств, называются *системой ограничений*.

Математическое выражение целевой функции и ее ограничений называется *математической моделью задачи.*

В общем виде математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) выглядит следующим образом.

Дана система линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

и линейная функция

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \quad (2)$$

где x_j – неизвестные; a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины; $j = \overline{1,n}$; $i = \overline{1,m}$.

Требуется найти такое неотрицательное решение

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \quad (3)$$

системы (1), при котором функция f принимает наименьшее (или наибольшее) значение.

Заметим, что все или некоторые уравнения системы ограничений (1) могут быть записаны в виде неравенств.

Математическая модель ЗЛП в более краткой записи имеет следующий вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i;\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,n};\ i = \overline{1,m}.$$

Вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений, называется *допустимым решением* (*планом*) ЗЛП.

Множество допустимых решений образует *область допустимых решений* (ОДР).

Допустимое решение, дающее $\max(\min) f$, называется *оптимальным решением.*

Задача о диете. Из имеющихся в нашем распоряжении продуктов требуется составить такую диету, которая, с одной стороны, удовлетворяла бы минимальные потребности организма в питательных веществах (белках, жирах, углеводах, минеральных солях, витаминах), с другой – требовала бы наименьших затрат.

Рассмотрим простую математическую модель этой задачи.

Пусть имеются два вида продуктов: $П_1$ и $П_2$, содержащих питательные вещества A,B,C. В 1 кг продуктов $П_1$ и $П_2$ содержится определенное количество питательных веществ того или иного вида. Эти сведения представлены в следующей таблице.

	A	B	C
в 1 кг $П_1$	a_1	b_1	c_1
в 1 кг $П_2$	a_2	b_2	c_2

Кроме этих данных нам известны: a,b,c – ежесуточные потребности организма в A, B, C и s_1,s_2 – стоимость 1 кг продуктов $П_1$, $П_2$. Требуется рассчитать количество x_1 продукта $П_1$ и количество x_2 продукта $П_2$ так, чтобы обеспечить необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на продукты.

Очевидно, общая стоимость продуктов будет $f = s_1x_1 + s_2x_2$. Общее количество вещества A в обоих видах продуктов равно $a_1x_1 + a_2x_2$. Оно должно быть не меньше a: $a_1x_1 + a_2x_2 \ge a$.

Аналогичные неравенства должны выполняться для B и C. Таким образом, перед нами ЗЛП.

Дана система

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 \ge a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 \ge b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 \ge c \end{array}\right\} \qquad (4)$$

трех линейных неравенств с двумя неизвестными x_1, x_2 и линейная функция $f = s_1x_1 + s_2x_2$.

Среди решений системы (4), удовлетворяющих дополнительно условию

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \qquad (5)$$

Требуется выбрать такое, при котором функция $f = s_1x_1 + s_2x_2$ достигает наименьшего значения (минимизируется):

$f \to \min$ при условиях (4), (5).

Таким образом, математическую модель задачи имеет следующий вид:

$$f = s_1x_1 + s_2x_2 \to \min;$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 \ge a, \\ b_1x_1 + b_2x_2 \ge b, \\ c_1x_1 + c_2x_2 \ge c, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Заметим, что к подобной схеме могут быть сведены различные задачи, например, задачи определения состава сплавов, смесей горючего, кормовых смесей, смесей минеральных удобрений и т.п.

Задача об использовании ресурсов. Предприятие имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов разного рода: сырье, оборудование и т.п. Допустим, например, что ресурсы трех видов R_1, R_2, R_3 имеются в количестве соответственно b_1, b_2, b_3 условных единиц. Предприятие выпускает два вида товаров T_1, T_2, причем известно, сколько единиц каждого ресурса требуется для производства одной единицы каждого товара.

Пусть a_{ij} – число единиц ресурса R_i $(i=1,2,3)$, необходимое для производства единицы товара T_j $(j=1,2)$. Известно, что доход, получаемый предприятием от единицы каждого вида товаров, соответственно равен c_1, c_2. Требуется при данных ресурсах выпустить такую комбинацию товаров, при которой доход предприятия оказался бы максимальным.

Обозначим через x_1, x_2 соответственно количества товаров T_1, T_2. Очевидно, доход предприятия $f = c_1x_1 + c_2x_2$. Общее количество ресурса R_1, используемого при выпуске обоих товаров, равно $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$. Оно не должно превосходить запаса b_1, т.е. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$.

Вообще, количество R_i $(i=1,2,3)$, используемого при выпуске обоих товаров $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2$, не должно превосходить b_i, т.е. должно выполняться неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \ (i=1,2,3).$$

Математическая задача о распределении ресурсов состоит в отыскании неизвестных x_1, x_2, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3 \end{array}\right\}$$

и сообщающих линейной функции $f = c_1x_1 + c_2x_2$ наибольшее значение (максимизирующих функцию f).

Модель ЗЛП может быть записана в одной из следующих форм.

1. *Общая*, или *произвольная*, *форма записи*:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & (i=\overline{1,m_1}), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=\overline{m_1+1,m_2}), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i & (i=\overline{m_2+1,m}), \end{array}\right\}$$

$x_j \ge 0$ ($j = \overline{1, n_1}$), x_j – произвольные ($j = \overline{n_1 + 1, n}$).

2. *Симметричная*, или *стандартная*, *форма записи*:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1, n};);$$

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1, n};).$$

3. *Каноническая*, или *основная*, *форма записи*:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1, n};).$$

Указанные три формы записи ЗЛП эквивалентны, т.е. с помощью несложных преобразований каждая из них может быть сведена к другой форме.

Например, задачу минимизации можно заменить задачей максимизации, и наоборот. Очевидно, что $\min f = -\max(-f)$.

От неравенств вида $\ge$ путем умножения левых и правых частей на -1 можно перейти к неравенствам вида $\le$, и наоборот.

Ограничения-неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$ ($a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i$) можно преобразовать в ограничения-равенства путем прибавления (вычитания) к левым частям (от левых частей) дополнительных (*балансовых*) неотрицательных переменных $x_{n+i} \ge 0$. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

Ограничение-равенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$, в случае необходимости, можно представить в виде системы неравенств

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i. \end{array}\right\}$$

Если в ЗЛП какая-то переменная не подчинена условию неотрицательности, ее заменяют разностью двух других неотрицательных переменных $x_k' \ge 0$ и $x_k'' \ge 0$: $x_k = x_k' - x_k''$. Вводимые дополнительные переменные имеют определенный экономический смысл, связанный с содержанием задачи.

Пример 1. При изготовлении трех видов изделий A, B и C используется токарное, фрезерное. сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования, общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида приведены в следующей таблице.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия			Общий фонд рабочего времени оборудования (ч)
	A	B	C	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение. Пусть будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц вида B и x_3 вида C. Тогда потребуется для производства такого количества изделий $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станко-часов фрезерного оборудования.

Общий фонд рабочего времени станков данного типа не может превышать 120, поэтому должно выполняться неравенство $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120$.

Рассуждая аналогично относительно возможного использования токарного, сварочного и шлифовального оборудования, придем к следующим неравенствам:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360.$$

При этом количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

Если будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц вида B и x_3 вида C, то прибыль от реализации составит $f = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$f = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Пример 2. Привести к канонической форме следующую ЗЛП:

$$f = 6x_1 + 8x_2 \to \min;$$
$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 10x_2 \geq 50, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 12x_1 + 3x_2 \geq 34, \\ 16x_1 + 14x_2 \leq 160, \\ 18x_1 + 15x_2 \leq 200, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решение. Заменяем функцию f на $f' = -f$. Из левых частей ограничений типа $\geq$ вычитаем неотрицательные переменные x_3, x_4 и x_5, а к левым частям ограничений типа $\leq$ прибавляем неотрицательные переменные x_6 и x_7.

Получим модель задачи в канонической форме:

$$f' = -6x_1 - 8x_2 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 10x_2 - x_3 = 50, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 10, \\ 12x_1 + 3x_2 - x_5 = 34, \\ 16x_1 + 14x_2 + x_6 = 160, \\ 18x_1 + 15x_2 + x_7 = 200, \end{array}\right\}$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Пример 3. Привести к канонической форме следующую ЗЛП:

$$f = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 \geq 9, \\ 5x_1 + 4x_3 \leq 12, \\ 2x_2 + 6x_3 = 4, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Решение. Заменяем функцию f на $f' = -f$. Поскольку на переменную x_2 не наложено условие неотрицательности, то ее заменим разностью двух неотрицательных переменных x_2' и x_2'' ($x_2 = x_2' - x_2''$) и подставим полученное выражение вместо переменной x_2 в модель задачи.

Из левой части ограничения $2x_1 + 4x_2 - 7x_3 \geq 9$ вычитаем неотрицательную переменную x_4, а к левой части ограничения $5x_1 + 4x_3 \leq 12$ прибавляем неотрицательную переменную x_5.

Получим модель задачи в канонической форме:

$$f' = -5x_1 - 6x_2' + 6x_2'' - 4x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2' - 4x_2' - 7x_3 - x_4 = 9, \\ 5x_1 + 4x_3 + x_5 = 12, \\ 2x_2' - 2x_2'' + 6x_3 = 4, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

1.2. Геометрия задачи линейного программирования. Графический метод решения

Рассмотрим задачу линейного программирования по отысканию максимума (минимума) линейной функции f на допустимом множестве X, заданном с помощью системы S линейных ограничений (уравнений или нестрогих неравенств). Множество X, заданное с помощью системы линейных ограничений в пространстве R^n, называется *выпуклой многогранной областью* в R^n.

Таким образом, геометрический смысл задачи линейного программирования состоит в *отыскании максимума* (*минимума*) *заданной линейной функции* f *на заданном выпуклом множестве* $X \subset R^n$.

Скажем, что целевая функция в ЗЛП *ограничена*, если в задаче на максимум целевая функция ограничена на допустимом множестве сверху, а в задаче на минимум – снизу.

Можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Если в ЗЛП допустимое множество непусто и целевая функция ограничена, то существует хотя бы одно оптимальное решение.

Теорема 2. Если в ЗЛП допустимое множество X имеет хотя бы одну угловую точку, а целевая функция f ограничена, то угловая точка множества X, в которой f принимает наибольшее (наименьшее) значение среди всех угловых точек множества X, является оптимальным решением данной задачи.

Наиболее простым и наглядным методом линейного программирования является графический метод. Он применяется для решения задач линейного программирования с двумя переменными, заданными в неканонической форме, и многими переменными в канонической форме при условии, что они содержат не более двух свободных переменных.

Пусть область допустимых решений X задается системой неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y \geq b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x + a_{m2}y \geq b_m, \end{cases}$$

целевая функция $f = c_1x_1 + c_2y$. Требуется найти максимум (или минимум) функции f на множестве X, а также точку, в которой достигается этот максимум (минимум).

Можно предложить следующий порядок графического решения задачи.

1. Находим область допустимых решений системы ограничений задачи.

2. Строим вектор $\vec{n} = (c_1; c_2)$.

3. Проводим линию уровня $f = 0$, которая перпендикулярна вектору $\vec{n} = (c_1; c_2)$.

4. Линию уровня $f = 0$ перемещаем по направлению вектора $\vec{n}$ для задач на максимум и в направлении вектора $-\vec{n}$ для задач на минимум. Перемещение линии уровня производится до тех пор, пока у нее не окажется

только одна общая точка с областью допустимых решений. Эта точка, определяющая единственное решение ЗЛП, и будет точкой экстремума.

Если случится, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, в этом случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны, а ЗЛП будет иметь бесконечное множество решений.

В этом случае говорят, что ЗЛП имеет альтернативный оптимум, ее решения определяются по формуле $\bar{x}_{\text{опт}} = (1-t)x_1 + tx_2$, где $0 \le t \le 1$, x_1 и x_2 – оптимальные решения в угловых точках ОДР.

Заметим, что если множество всех допустимых решений является пустым, то ЗЛП неразрешима.

5. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

Пример 1. Для изготовления изделия A нужно затратить 20 часов работы токарного станка и 30 часов работы фрезерного станка. Для изготовления изделия B нужно затратить 10 часов работы токарного станка и 40 часов работы фрезерного станка.

Ресурсы времени работы токарных станков равны 2000 станкочасов, а ресурсы времени фрезерных станков равны 4800 станкочасов. Прибыль от реализации 1 единицы изделия A или изделия B 400 составляет денежных единиц.

Составить оптимальный план выпуска изделий A и B из условия максимума прибыли.

Решение. Пусть x – количество изделий A, y – количество изделий B ($x \ge 0; y \ge 0$). Для их изготовления нужно затратить $20x+10y$ часов работы токарного станка и $30x+40y$ часов работы фрезерного станка.

Учитывая ресурсы станкочасов, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 20x+10y \le 2000, \\ 30x+40y \le 4800, \\ x \ge 0,\ y \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y \le 200, \\ 3x+4y \le 480, \\ x \ge 0,\ y \ge 0. \end{cases}$$

Решением этой системы неравенств будет область D, лежащая в I координатной четверти ниже прямых $2x+y=200$ и $3x+4y=480$. Она изображена на рисунке 1.

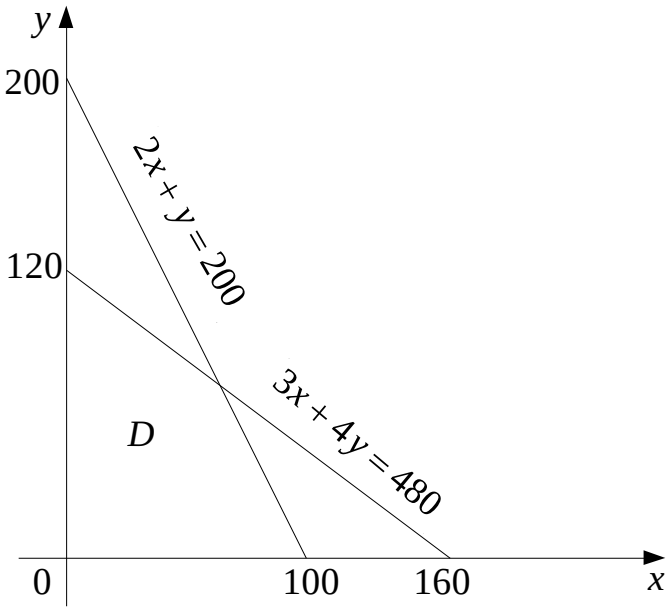


Рисунок 1

Целевая функция будет иметь вид: $f = 400x + 400y \to \max$.

Строим вектор $\vec{n}_1 = 0{,}1\vec{n}$. Проводим линию уровня $f = 0$, которая перпендикулярна вектору $\vec{n}_1$. Линию уровня $f = 0$ перемещаем по направлению вектора $\vec{n}_1$.

Точкой выхода линии уровня из области допустимых решений является точка пересечения прямых $2x + y = 200$ и $3x + 4y = 480$.

На рисунке 2 эта линия максимального уровня изображена пунктирной линией, она лежит выше всей области D.

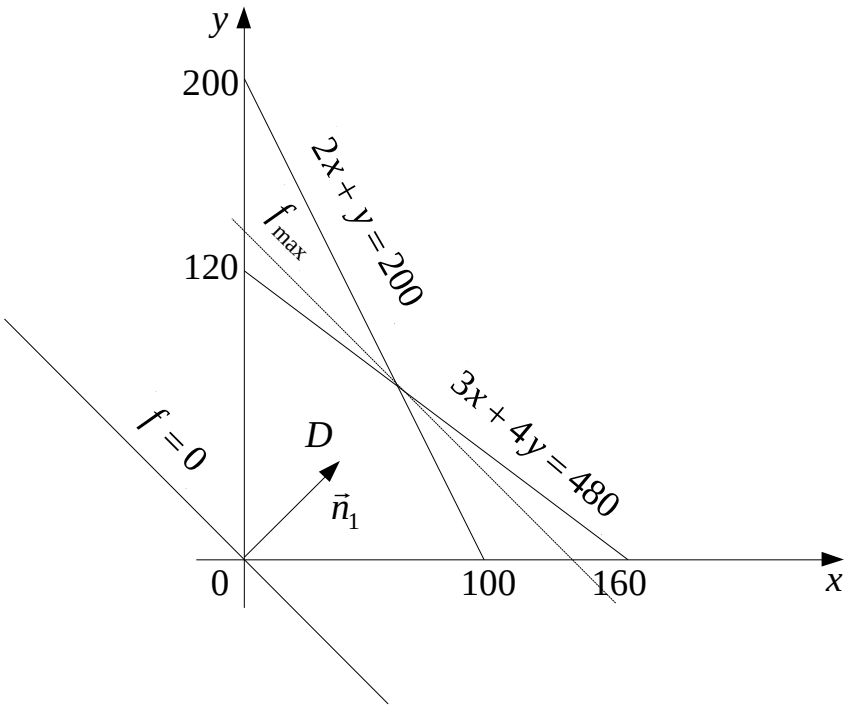


Рисунок 2

Решая систему уравнений $\begin{cases}2x+y=200,\\3x+4y=480,\end{cases}$ получаем координаты точки $(64;72)$, в которой и будет оптимальное решение.

Таким образом, необходимо выпускать: изделий A – 64; изделий B – 72. При этом доход от реализации составит $400\cdot 64+400\cdot 72=54400$ денежных единиц.

Графическим методом можно решать и задачи со многими переменными, если в канонической записи задачи разность между числом переменных n и числом линейно независимых уравнений r равно двум, т.е. $n-r=2$.

Преобразовав модель такой задачи к симметрической форме, получим ЗЛП с двумя переменными, которую и решают графически.

Пример 2. Решите задачи линейного программирования графическим методом:

$$f=2x_1-x_2-2x_3+6x_4\to\max;$$

$$\left.\begin{array}{l}x_1+x_2+x_3+3x_4=16,\\-x_1+x_2+3x_3-x_4=8,\end{array}\right\}$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=1,...,4).$$

Решение. Коэффициенты ограничительных уравнений

$$x_1+x_2+x_3+3x_4=16, \qquad (1)$$

$$-x_1+x_2+3x_3-x_4=8 \qquad (2)$$

не пропорциональны, следовательно, уравнения линейно независимы. Кроме того, $n-r=4-2=2$. Следовательно, задачу можно решить графически.

Вычитая, а затем складывая уравнения (1) и (2) системы ограничений, получим эквивалентную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l}x_1-x_3+2x_4=4,\\x_2+2x_3+x_4=12.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Учитывая неотрицательность переменных x_1 и x_2 в системе (3), заменим ее эквивалентной системой неравенств

$$\left.\begin{array}{l}-x_3+2x_4\le 4,\\2x_3+x_4\le 12.\end{array}\right\}$$

Исключим из целевой функции переменные x_1 и x_2, используя равенства (3):

$$f=2(4+x_3-2x_4)-(12-2x_3-x_4)-2x_3+6x_4,$$

$$f=-4+2x_3+3x_4.$$

Таким образом, пришли к симметрической форме записи данной задачи:

$$f=-4+2x_3+3x_4\to\max,$$

$$\left.\begin{array}{l}-x_3+2x_4\le 4,\\2x_3+x_4\le 12,\end{array}\right\}$$

$$x_3\ge 0,\ x_4\ge 0.$$

Решая графическим методом полученную двумерную задачу, получим, что максимум функции $f=-4+2x_3+3x_4$ достигается в вершине B (рис. 3).

Координаты $x_3^* = 4$ и $x_4^* = 4$ вершины найдем B находятся при решении системы уравнений $\left.\begin{array}{l} -x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_3 + x_4 = 12. \end{array}\right\}$

Подставляя значения $x_3^* = 4$ и $x_4^* = 4$ в уравнения (1) и (2), определим координаты $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 0$ точки оптимума.

Таким образом, в точке $x^* = (0;0;4;4)$ $f_{\max} = 16$.

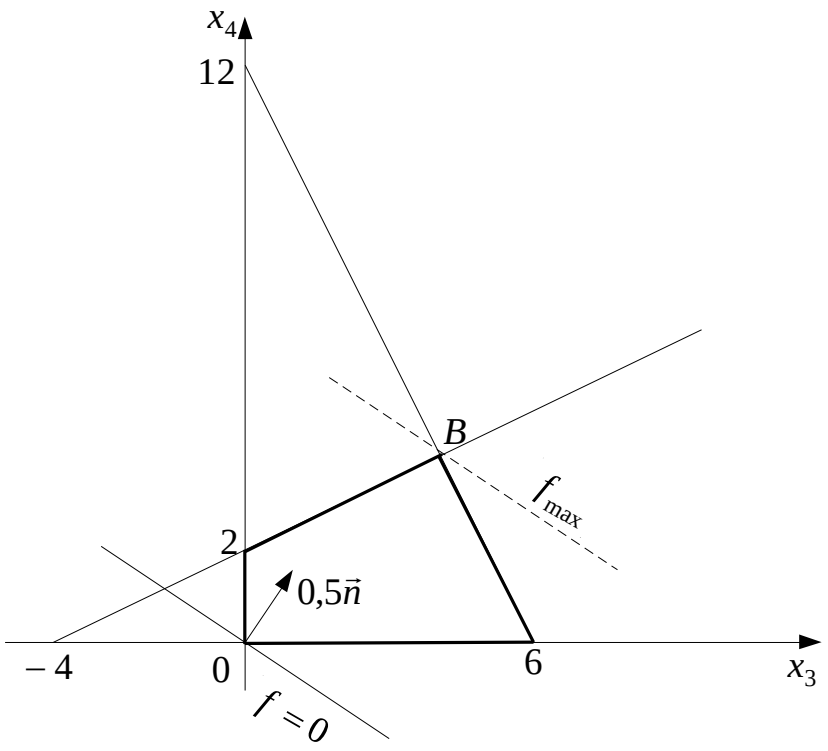


Рисунок 3

1.3. Симплексный метод решения задач линейного программирования

Наиболее распространенным методом решения задач линейного программирования является так называемый *симплекс-метод.*

С самого начала заметим, что симплекс-метод в его непосредственной форме предназначен для решения *канонической задачи линейного программирования*:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}), \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n;}).$$

Из геометрического смысла ЗЛП следует, что для ее решения необходимо вычислить координаты всех вершин многогранника ограничений

и значения в них целевой функции. Решить задачу линейного программирования можно методом перебора, поскольку перебором всех вершин можно найти такую вершину, в которой целевая функция f принимает экстремальное значение. Но при решении ЗЛП таким способом возможны следующие две трудности:

1) если число неизвестных n больше числа ограничений m $(n > m)$, система ограничений линейна зависима, поэтому для построения многогранника решений требуется выделение всех линейно независимых систем уравнений и их решение;

2) число вершин многогранника резко возрастает с увеличением числа неизвестных n $(n > m)$, и метод перебора всех вершин может оказаться слишком трудоемким.

Симплексный метод обеспечивает более рациональное решение задачи, чем метод перебора.

Суть этого метода состоит в том, что, отправляясь из некоторой произвольной вершины многогранника ограничений, переходят к вычислению только такой вершины, в которой значение целевой функции будет больше, чем в предыдущей. Таким образом, производится упорядоченный перебор вершин, при котором происходит постоянное увеличение целевой функции. Поэтому симплексный метод называется также *методом последовательного улучшения плана.*

Решение ЗЛП симплекс-методом включает в себя два этапа.

Первый заключается в нахождении одной произвольной вершины многогранника ограничений, координаты которой определяют так называемый *начальный опорный план.*

Второй этап состоит в последовательном упорядоченном переходе от одной вершины многогранника к другой, смежной данной, при переходе к которой обеспечивается наибольшее возрастание целевой функции.

На каждом шаге процесса улучшения плана осуществляется проверка на оптимальность. Очевидно, если среди вершин, прилегающих к данной, нет такой, при переходе к которой происходит возрастание целевой функции, то план будет оптимальным.

Можно предложить следующий алгоритм решения ЗЛП симплексным методом.

1. Получение начального решения.

Для этого выбираются m переменных, обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 – в остальные уравнения системы (2). Эти переменные называются *базисными*. Остальные переменные называются *небазисными* или *свободными.*

Все свободные переменные полагаются равными 0, а базисные переменные – правым частям системы соответствующих ограничений.

Если $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – базисные переменные, то начальное решение $\bar{x}_0$ имеет следующий вид:

$$\bar{x}_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_m = b_m, x_{m+1} = 0, ..., x_n = 0).$$

Если все $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, то начальное решение является допустимым.

2. Выражение функции (1) только через свободные переменные.

3. Проверка решения на оптимальность.

Пример 1. Решить ЗЛП:

$$f = -x_4 + x_5 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \end{array}\right\}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}).$$

Решение. Система уравнений-ограничений $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \end{array}\right\}$ совместна, поскольку ранги матрицы системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и расширенной матрицы системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ совпадают и равны 3. Таким образом, система уравнений совместна, три базисные переменные можно выразить через две свободные. Выразим, например, переменные x_1, x_2, x_3 через x_4 и x_5, т.е. приведем систему к единичному базису:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Целевую функцию $f = -x_4 + x_5$ выразим через свободные переменные x_4 и x_5 (в рассматриваемом примере она уже выражена).

При $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ базисные переменные будут равны: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Таким образом, $(1;2;3;0;0)$ – первое допустимое решение системы уравнений.

Целевая функция f при найденном допустимом решении имеет значение 0: $f = 0$.

Попытаемся сейчас увеличить значение целевой функции. Заметим, что увеличение x_4 уменьшит значение целевой функции $f = 0$, так как перед переменной x_4 стоит отрицательный коэффициент, а увеличение x_5 увеличит и найденное значение целевой функции.

Увеличиваем x_5 так, чтобы x_1, x_2, x_3 не стали отрицательными, оставив $x_4 = 0$. Из второго уравнения системы (3) видим, что x_5 можно увеличивать до 2.

Тогда $(5;0;1;0;2)$ – второе допустимое решение. Значение целевой функции при втором допустимом решении равно 2: $f = 2$.

Видим, что на втором шаге значение целевой функции увеличилось.

Примем далее за свободные переменные x_2 и x_4, т.е. те, которые в новом решении имеют нулевые значения. Для этого выразим из второго уравнения системы (3) переменную x_5 через переменные x_2 и x_4: $x_5 = 2 - x_2 + 2x_4$.

Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

$$f = 2 - x_2 + x_4.$$

Попытаемся снова увеличить значение целевой функции f. Заметим, что увеличение x_4 даст и увеличение функции f, поскольку перед x_4 стоит положительный коэффициент. увеличиваем x_4 так, чтобы x_1, x_3, x_5 не стали отрицательными, оставив $x_2 = 0$.

Из второго уравнения системы (4) видим, что значение x_4 можно увеличивать до $1 - 5x_4 \geq 0$, $x_4 \leq \frac{1}{5}$.

При этом условии $\left(\frac{28}{5}; 0; 0; \frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right)$ – третье допустимое решение. Значение линейной функции f при этом третьем допустимом решении равно $\frac{11}{5}$. Видим, что значение функции f на третьем шаге увеличилось.

Выразим сейчас переменные x_1, x_4, x_5 через свободные переменные x_2, x_3

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{28}{5} - \frac{5}{3}x_3 - \frac{7}{5}x_2, \\ x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2, \\ x_5 = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2, \end{array}\right\}$$

тогда $f = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{4}x_2$.

Поскольку в линейной функции обе свободные переменные входят с отрицательными коэффициентами, поэтому наибольшее значение функции f достигается при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Это свидетельствует о том, что решение $\left(\frac{28}{5}; 0; 0; \frac{1}{5}; \frac{12}{5}\right)$ является оптимальным и $f_{\max} = \frac{11}{5}$.

Для удобства перехода от одного опорного решения системы условий ЗЛП к другому, на котором целевая функция f принимает значение не меньшее, чем на предыдущем, составляют так называемую *симплекс-таблицу*.

Проиллюстрируем процесс заполнения таблицы на примере следующей ЗЛП:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,4}).$$

Как известно, если $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$, то начальный опорный план имеет вид $\bar{x}_0 = (b_1, b_2, 0, 0)$. Значение целевой функции, соответствующее этому плану, равно $f_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2$.

Составим начальную симплекс-таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Симплексные отношения
			c_1	c_2	c_3	c_4	
x_1	c_1	b_1	1	0	a_{13}	a_{14}	b_i / a_{ij}
x_2	c_2	b_2	0	1	a_{23}	a_{24}	
$f_j - c_j$		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	

В столбце *БП* записываются базисные переменные. Столбец $C_Б$ содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Столбец A_0 содержит свободные члены $b_i \ge 0$ системы ограничений. Коэффициенты a_{ij} системы ограничений занимают основное поле таблицы. Сверху над рабочей частью таблицы указаны все переменные и коэффициенты c_j целевой функции. Последний столбец «Симплексные отношения» (необязательный) предназначен для выбора разрешающей строки.

Последняя строка $f_j - c_j$ называется *индексной* или *строкой оценок*. Рассмотрим подробнее заполнение индексной строки. Здесь расположены значения целевой функции для начального опорного плана $\bar{x}_0 = (b_1, b_2, 0, 0)$, т.е. $f(\bar{x}_0) = \Delta_0 = (c_1, c_2) \cdot (b_1, b_2) = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_0$, и оценки индексной строки $\Delta_j = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_j - c_j$.

Пример 2. Занести условия задачи в симплексную таблицу и записать ее начальный опорный план:

$$f = -5x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 8, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 &= 48, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,4}).$$

Решение. Каждое ограничение ЗЛП имеет предпочтительный вид, так как при неотрицательности его правой части $(b_i \ge 0)$ левая часть содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а остальные ограничения – с коэффициентом, равным нулю.

Переменные x_3 и x_4 являются базисными, x_1 и x_2 – свободными. Заносим условия задачи в симплексную таблицу.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			-5	7	-1	2
x_3	-1	8	-2	1	1	0
x_4	2	48	3	-8	0	1
$f_j - c_j$		88	13	-24	0	0

Индексная строка $f_j - c_j$ заполнена по известным формулам $\Delta_0 = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_0$, $\Delta_j = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_j - c_j$:

$$\Delta_0 = (-1)\cdot 8 + 2\cdot 48 = 88,$$
$$\Delta_1 = (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 3 - (-5) = 13,$$
$$\Delta_2 = (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-8) - 7 = -24,$$
$$\Delta_3 = (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 - (-1) = 0,$$
$$\Delta_4 = (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 - 2 = 0.$$

Приравнивая x_1 и x_2 нулю, находим $x_3 = 8$, $x_4 = 48$. Таким образом, начальный опорный план $\bar{x}_0 = (0;0_2;8;48)$. В столбце A_0 индексной строки получено значение $\Delta_0 = 88$ целевой функции, соответствующее плану $\bar{x}_0$.

Заметим, что по симплексной таблице четко видны результаты исследования.

Замечание 1. Поскольку $\min f = -\max(-f)$, то задачу минимизации можно заменить задачей максимизации функции $-f$.

Например, при решении задачи

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}),$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n;}).$$

решаем задачу

$$f_1 = -f = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1,m}),$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n;}).$$

Признак оптимальности опорного плана. Если индексная строка симплексной таблицы при решении ЗЛП на максимум не содержит отрицательных элементов, то достигнутое опорное решение является оптимальным.

Если для некоторого опорного плана все оценки Δ_j индексной строки симплексной таблицы при решении ЗЛП на минимум неположительные, то такой план оптимален.

Так, например, начальный опорный план $\bar{x}_0 = (0;0_2;8;48)$ в примере 2 не является оптимальным, поскольку $\Delta_2 = -24$.

Рассмотрим ЗЛП на максимум и переход к *нехудшему опорному* плану.

Приводим ЗЛП к каноническому виду и заносим условие задачи в симплексную таблицу. Если в индексной строке симплексной таблицы все $\Delta_j \geq 0$, то начальный опорный план $\bar{x}_0$ оптимален. План не оптимален, если же существуют $\Delta_j < 0$. При определенных условиях его можно улучшить.

Среди отрицательных оценок Δ_j находят максимальную оценку по модулю:

$$\max_{\Delta_j<0}|\Delta_j| = |\Delta_{j_0}|.$$

Столбец j_0 называется *разрешающим*. При решении ЗЛП на минимум разрешающий столбец определяется условием

$$\max_{\Delta_j<0}\Delta_j = \Delta_{j_0}.$$

Соответствующую разрешающему столбцу переменную x_{j_0} следует ввести в базис. Для определения выводимой из базиса переменной находят *симплексные* отношения

$$\frac{b_i}{a_{ij_0}},\ a_{ij_0}>0.$$

Определяем наименьшее симплексное отношение, т.е. $\min\left\{\frac{b_i}{a_{ij_0}}\right\} = \frac{b_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} = \theta$, которое определяет строку, содержащую исключаемую из базиса переменную x_{i_0}. Соответствующая минимальному симплексному отношению строка i_0 называется *разрешающей*. Стоящий на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки элемент также называется *разрешающим*.

Чтобы завершить преобразования, ведущие к новому опорному плану, составляют по следующим правилам таблицу.

1. Элементы строки i_0 новой таблицы равны соответствующим элементам разрешающей строки старой таблицы, деленным на разрешающий элемент.

2. Все элементы столбца j_0 новой таблицы равны нулю. Исключением является элемент $a'_{i_0 j_0} = 1$.

3. Чтобы получить все остальные элементы новой таблицы (включая элементы индексной строки), надо из соответствующего элемента прежней таблицы вычесть произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент $\left(a'_{i\,j} = a_{i\,j} - \frac{a_{i_0\,j}\cdot a_{i\,j_0}}{a_{i_0\,j_0}}\right)$.

Для контроля вычислений элементов индексной строки применяются формулы $\Delta_0 = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_0$, $\Delta_j = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_j - c_j$.

Признак бесконечности множества оптимальных планов. Если индексная строка последней симплексной таблицы. Содержащей оптимальный план, имеет хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.

Пример 3. Решить симплексным методом ЗЛП:

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \le 34, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \le 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 22, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3;4\,.$$

Решение. Прежде, чем решить эту задачу симплекс-методом, приведем ее к каноническому виду, добавив к левым частям неравенств ограничений неотрицательные переменные x_5, x_6, x_7.

В канонической форме ЗЛП примет вид:

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 34, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_6 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_7 = 22, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3;4;5;6;7\,.$$

Очевидно, что x_5, x_6, x_7 – базисные переменные, при этом переменные x_1, x_2, x_3, x_4 будут свободными, поэтому $(0;0;0;0;34;16;22)$ – начальный опорный план задачи

Составим начальную симплекс-таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	2	0	0	0
x_5	0	34	2	4	1	5	1	0	0
x_6	0	16	4	1	4	1	0	1	0
x_7	0	22	2	3	1	2	0	0	1
$f_j - c_j$		0	-7	-3	-4	-2	0	0	0

$$\Delta_0 = 0\cdot 34 + 0\cdot 16 + 0\cdot 22 = 0,$$
$$\Delta_1 = 0\cdot 2 + 0\cdot 4 + 0\cdot 2 - 7 = -7,$$
$$\Delta_2 = 0\cdot 4 + 0\cdot 1 + 0\cdot 3 - 3 = -3,$$
$$\Delta_3 = 0\cdot 1 + 0\cdot 4 + 0\cdot 1 - 4 = -4,$$
$$\Delta_4 = 0\cdot 5 + 0\cdot 1 + 0\cdot 2 - 2 = -2,$$

Аналогично $\Delta_5 = \Delta_6 = \Delta_7 = 0$.

Содержащийся в этой таблице план не является опорным, поскольку в индексной строке имеются отрицательные элементы.

Будем улучшать его, переходя от одного базиса системы к другому. Выберем разрешающий столбец, как столбец, соответствующий наибольшей по модулю отрицательной оценке, т.е. $\max\{|-7|;|-3|;|-4|;|-2|\}$. Таким образом, в качестве разрешающего столбца выбираем столбец, соответствующий свободной переменной x_1.

Вычислим симплексные отношения: $\frac{b_i}{a_{i1}}$. Получим: $\frac{34}{2}=17$, $\frac{16}{4}=4$, $\frac{22}{2}=11$. Находим разрешающую строку по наименьшему симплексному отношению: $\min\{17;4;11\}=4$.

Таким образом, разрешающим элементом является элемент 4, стоящий на пересечении строки для x_6 и столбца для x_1 (выделен в таблице).

Переменную x_6 выведем из базиса, а переменную x_1 введем в базис. Элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент $a_{21}=4$. Все элементы разрешающего столбца заменяем нулями, кроме $a'_{21}=1$, а все остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу: из соответствующего элемента прежней таблицы вычитаем произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент $\left(a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i_0 j}\cdot a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}}\right)$.

Строим следующую таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	2	0	0	0
x_5	0	26	0	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_1	7	4	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
x_7	0	14	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
f_j-c_j		28	0	$-\frac{5}{4}$	3	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	0

Заполняя таблицы, необходимо после каждой итерации делать контрольные проверки. Для первой итерации пересчитаем значение $\Delta_0=f_1=0\cdot 26+7\cdot 4+0\cdot 14=28$. Пересчитаем все оценки:

$$\Delta_1=0\cdot 0+7\cdot 1+0\cdot 0-7=0,$$

$$\Delta_2=0\cdot\frac{7}{2}+7\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{5}{2}-3=-\frac{5}{4},$$

$$\Delta_3=0\cdot(-1)+7\cdot 1+0\cdot(-1)-4=3,$$

$$\Delta_4=0\cdot\frac{9}{2}+7\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{4},$$

$$\Delta_5=0\cdot 1+7\cdot 0+0\cdot 0-0=0,$$

$$\Delta_6=0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+7\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-0=\frac{7}{4},$$

$$\Delta_7=0\cdot 0+7\cdot 0+0\cdot 1-0=0.$$

Анализируя полученные результаты, видим, что пока еще не получен оптимальный план, так как в индексной строке имеются отрицательные элементы.

Повторим наши преобразования, выбрав разрешающий элемент, равный $\frac{5}{2}$. В результате получим следующую симплекс-таблицу.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	2	0	0	0
x_5	0	$\frac{32}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{5}$
x_1	7	$\frac{13}{5}$	1	0	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	3	$\frac{28}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$f_j - c_j$		35	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Осуществим контроль вычислений элементов индексной строки:

$$\Delta_0 = 0\cdot\frac{32}{5} + 7\cdot\frac{13}{5} + 3\cdot\frac{28}{5} = 35,$$

$$\Delta_1 = 0\cdot 0 + 7\cdot 1 + 3\cdot 0 - 7 = 0,$$

$$\Delta_2 = 0\cdot 0 + 7\cdot 0 + 3\cdot 1 - 3 = 0,$$

$$\Delta_3 = 0\cdot\frac{4}{5} + 7\cdot\frac{11}{10} - 3\cdot\frac{2}{5} - 4 = \frac{5}{2},$$

$$\Delta_4 = 0\cdot\frac{12}{5} + 7\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot\frac{3}{5} - 2 = \frac{1}{2},$$

$$\Delta_5 = 0\cdot 1 + 7\cdot 0 + 3\cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_6 = 0\cdot\frac{3}{10} + 7\cdot\frac{3}{10} - 3\cdot\frac{1}{5} - 0 = \frac{3}{2},$$

$$\Delta_7 = 0\cdot\left(-\frac{7}{5}\right) + 7\cdot\left(-\frac{1}{10}\right) + 3\cdot\frac{2}{5} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Итак, в индексной строке последней таблицы нет ни одного отрицательного элемента, следовательно, содержащийся в ней план является оптимальным.

Выпишем его. Опорный план $\left(\frac{13}{5}, \frac{28}{5}, 0, 0, \frac{32}{5}, 0, 0\right)$ является оптимальным, а соответствующее значение 35целевой функции будет максимальным.

Пример 4. Решить симплексным методом ЗЛП:

$$f = 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 \to \min;$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + x_5 &= 2,\\ x_1 - x_3 + 2x_5 &= 4,\\ 3x_3 + x_4 - 3x_5 &= 1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3;4;5.$$

Решение. Вместо минимизации функции f будем максимизировать функцию

$$\psi = -f = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5.$$

Таким образом, будем решать следующую задачу линейного программирования:

$$\psi = -f = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + x_5 &= 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_5 &= 4, \\ 3x_3 + x_4 - 3x_5 &= 1, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3;4;5.$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу и решим данную ЗЛП по описанному выше алгоритму.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексные отношения
			–2	3	1	0	1	
x_2	3	2	0	1	2	0	1	$2/1 = 2 - \min$
x_1	–2	4	1	0	–1	0	2	$4/2 = 2$
x_4	0	1	0	0	3	1	–3	
$\psi_j - c_j$		–2	0	0	7	0	–2	

$$\Delta_0 = 3\cdot 2 - 2\cdot 4 + 0\cdot 1 = -2,$$
$$\Delta_1 = 3\cdot 0 - 2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2 = 0,$$
$$\Delta_2 = 3\cdot 1 - 2\cdot 0 + 0\cdot 0 - 3 = 0,$$
$$\Delta_3 = 3\cdot 2 - 2\cdot (-1) + 0\cdot 3 - 1 = 7,$$
$$\Delta_4 = 3\cdot 0 - 2\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0,$$
$$\Delta_5 = 3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 0\cdot (-3) - 1 = -2.$$

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексные отношения
			–2	3	1	0	1	
x_5	1	2	0	1	2	0	1	
x_1	–2	0	1	–2	–5	0	0	
x_4	0	7	0	3	9	1	0	
$\psi_j - c_j$		2	0	2	11	0	0	

Индексная строка последней симплекс-таблицы не содержит отрицательных элементов. Следовательно, $(0;0;0;7;2)$ – оптимальное решение. $f_{\min} = -\psi_{\max} = -2$.

Замечание 2. Используются и другие формы симплексных таблиц.

Пример 5. Решить симплексным методом следующую задачу линейного программирования:

$$f = 5x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 &\le 50, \\ x_2 &\le 40, \\ 2x_1 + x_2 &\le 80, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду, добавив к левым частям неравенств ограничений неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5.

Поставленная задача в канонической форме примет вид:

$$f = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 50, \\ x_2 + x_4 &= 40, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 80, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Переменные x_3, x_4, x_5 являются базисными (БП), переменные x_1, x_2 – свободные (СП).

Составим симплекс-таблицу задачи: в столбец базисных переменных (БП) запишем базисные переменные, в столбец свободных членов (СЧ) занесем правые части уравнений ограничений. В последнюю (f-строку) запишем коэффициенты целевой функции с противоположными знаками. В остальные клетки таблицы запишем коэффициенты при свободных переменных (СП) в левых частях уравнений системы ограничений.

БП	СЧ	СП	
		x_1	x_2
x_3	50	1	0
x_4	40	0	1
x_5	80	2	1
f	0	–5	–3

Для нахождения опорного плана полагаем равными нулю свободные переменные: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Базисные переменные будут равны соответствующим свободным членам системы ограничений: $x_3 = 50$, $x_4 = 40$, $x_5 = 80$.

Таким образом, начальный опорный план имеет вид: $\overline{x_0} = (0;0;50;40;80)$. Значение целевой функции при этом плане равно нулю (записано в столбце свободных членов f-строки).

Полученный план не является оптимальным, так как в f-строке имеются отрицательные элементы. Для улучшения плана выберем столбец с наименьшим отрицательным элементом в f-строке (в нашем случае –5). Столбец, содержащий –5, и будет разрешающим.

Для нахождения разрешающей строки найдем наименьшее положительное отношение элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца: $\min\left\{\frac{50}{1};\frac{80}{2}\right\}=40$. Таким образом, разрешающей строкой является содержащая x_5 третья строка.

Разрешающим элементом будет 2, находящаяся на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца.

Находящуюся в разрешающей строке переменную x_5 выводим из базиса, а находящуюся в разрешающем столбце переменную x_1 вводим в базис, т.е. переменные x_5 и x_1 меняем местами.

Для нахождения нового опорного плана построим новую симплекс-таблицу, осуществляя следующие преобразования:

1) разрешающий элемент заменяем обратной величиной, т.е. вместо 2 записываем $\frac{1}{2}$;

2) остальные элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент (на 2);

3) остальные элементы разрешающего столбца делим на разрешающий элемент и меняем знак;

4) прочие элементы вычисляем по формуле $a'_{ij}=\frac{a_{ij}\cdot a_{i_0 j_0}-a_{i_0 j}\cdot a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}}$ (по правилу прямоугольника). Здесь a_{ij} – пересчитываемый элемент, расположенный в i-ой строке и j-ом столбце; $a_{i_0 j_0}$ – разрешающий элемент; $a_{i_0 j}$ – элемент, расположенный в разрешающей строке и j-ом столбце; $a_{i j_0}$ – элемент, расположенный в разрешающем столбце и i-ой строке; a'_{ij} – элемент новой симплекс-таблицы.

Осуществив указанные выше вычисления, получим новую симплекс-таблицу:

БП	СЧ	СП	
		x_5	x_2
x_3	10	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_4	40	0	1
x_1	40	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f	200	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Построенный новый опорный план имеет следующий вид: $(40;0;10;40;0)$. Он не является оптимальным, так как в f-строке имеется отрицательный элемент $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Повторим наши преобразования, выбрав разрешающий элемент, равный 1. В результате получим следующую симплекс-таблицу.

БП	СЧ	СП	
		x_5	x_4
x_3	30	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	40	0	1
x_1	20	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
f	220	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

Полученный новый опорный план имеет следующий вид: $(20;40;30;0;0)$. Он оптимален, поскольку в f-строке все элементы неотрицательные. $f_{\max} = 5 \cdot 20 + 3 \cdot 40 = 220$.

1.4. Метод искусственного базиса (*M*-метод)

Пусть система ограничений ЗЛП имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \; b_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}).$$

Введем дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$ и перейдем к каноническому виду:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \; b_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}).$$

Система ограничений, вообще говоря, не имеет предпочтительного вида. Для решения ЗЛП с ограничениями, которые не имеют предпочтительного вида, применяют метод искусственного базиса (*M*-метод).

Введем искусственный базис путем перехода к *M*-задаче:

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+) M \sum_{i=1}^{m} w_i \to \max(\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + w_i = b_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \; w_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}),$$

где в целевой функции знак «–» относится к задаче максимизации, а знак «+» к задаче на минимизацию, M – сколь угодно большое положительное число.

В системе $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + w_i = b_i \quad (i = \overline{1,m})$ переменные $w_i \quad (i = \overline{1,m})$ образуют базис, называемый *искусственным*. При $x_1 = \ldots = x_n = 0$ из $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} + w_i = b_i$

получаем начальный опорный план $\bar{x}_0 = (\underbrace{0;0;...,0}_{n+m};b_1;b_2;...;b_m)$ M-задачи. Заметим, что если $(x_1^0;...;x_n^0;0;...;0)$ – некоторый план M-задачи, то $(x_1^0;...;x_n^0)$ – план исходной задачи, и $\bar{f}(x_1^0;...;x_n^0;0;...;0) = f(x_1^0;...;x_n^0)$.

Получение оптимального опорного плана исходной задачи основано на следующих утверждениях.

Теорема 1. Если в оптимальном плане M-задачи все искусственные равны нулю $(x_1^*;...;x_n^*;0;...;0)$, то план $(x_1^*;...;x_n^*)$ является оптимальным для исходной задачи.

Теорема 2. Если в оптимальном плане M-задачи, по крайней мере, одна из искусственных переменных положительна при любом большом M, то исходная задача не имеет ни одного плана.

Теорема 3. Если M-задача неразрешима, то и исходная задача неразрешима.

Замечание. При решении ЗЛП методом искусственного базиса искусственные переменные следует вводить лишь в те уравнения, которые не разрешены относительно «естественных» базисных переменных.

Выражение для функции $\bar{f}$ состоит из двух слагаемых: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = f$ и $M\sum_{i=1}^{m} w_i$, поэтому в симплекс-таблицах для $\bar{f}$ лучше отводить две строки: одну для f, другую для $M\sum_{i=1}^{m} w_i$.

Признак оптимальности проверяется сначала по второй строке, отвечающей сумме $M\sum_{i=1}^{m} w_i$. Лишь после того, как все элементы этой строки станут равными нулю, признак оптимальности проверяется по первой строке, отвечающей функции $f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

По мере исключения из базиса искусственных переменных соответствующие им столбцы элементов можно опускать. Объясняется это тем, искусственные переменные в базис не возвращаются.

Пример 1. Занести условие задачи в симплексную таблицу и записать начальный опорный план:

$$f = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3, \end{array}\right\}$$
$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,3}).$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду, а затем к *M*-задаче:

$$\bar{f} = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 - Mw_1 - Mw_2 \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 4,\\ x_1 + x_2 + x_4 &= 10,\\ 3x_1 + x_2 - x_5 + w_1 &= 9,\\ -x_1 + 3x_2 - x_6 + w_2 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\,(j = \overline{1,6}),\ w_i \ge 0\,(i = 1,2).$$

Теперь *M*-задача имеет предпочтительный вид. Занесем ее условие в симплекс-таблицу. Индексную строку разбиваем на две. В первой записываются свободные члены выражений $\Delta_0 = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_0$ и $\Delta_j = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_j - c_j$, а во второй – слагаемые, содержащие M.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w_1	w_2
			9	6	–3	0	0	0	$-M$	$-M$
x_3	–3	4	–1	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	10	1	1	0	1	0	0	0	0
w_1	$-M$	9	3	1	0	0	–1	0	1	0
w_2	$-M$	3	–1	3	0	0	0	–1	0	1
$\bar{f}_j - c_j$		–12	–6	–9	0	0	0	0	0	0
		$-12M$	$-2M$	$-4M$	0	0	M	M	0	0

Начальный опорный план имеет вид:

$$\bar{x}_0 = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; w_1; w_2) = (0;0;4;10;0;0;9;3).$$

$$\bar{f}(\bar{x}_0) = -12 - 12M.$$

Пример 2. Решить методом искусственного базиса следующую задачу:

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4,\\ x_1 - 2x_3 &\le 5,\\ 2x_1 + 2x_2 &\ge 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Решение. Сначала приведем задачу к канонической форме, введя балансовые переменные $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$. Будем иметь:

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4,\\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 5,\\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Полученная задача эквивалентна исходной задаче, но отсутствует исходный допустимый базис. Во втором уравнении, впрочем, имеется базисная переменная x_4, которую можно ввести в базис.

Для первого и третьего уравнений введем искусственные переменные $w_1 \ge 0$, $w_2 \ge 0$. В результате получим *M*-задачу:

$$\bar{f} - f + M(w_1 + w_2) = -2x_1 + x_2 - x_3 + Mw_1 + Mw_2 \to \min;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + w_1 &= 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 + w_2 &= 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0,\ w_1 \ge 0,\ w_2 \ge 0.$$

Заполняем первую симплекс-таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2
			–2	1	–1	0	0	*M*	*M*
w_1	*M*	4	2	1	1	0	0	1	0
x_4	0	5	1	0	–2	1	0	0	0
w_2	*M*	3	2	2	0	0	–1	0	1
$\bar{f}_j - c_j$		0	2	–1	1	0	0	0	0
		7*M*	4*M*	3*M*	*M*	0	$-M$	0	0

В последней строке (при достаточно большом M) имеются сразу три положительных числа: $4M$, $3M$, M. Выбираем первое из них.

Разрешающий элемент находится в столбце x_1 и строке w_2. Производим преобразования, в результате которых искусственное неизвестное w_2 выходит из базиса, уступая в нем место неизвестному x_1.

Получим следующую таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2
			–2	1	–1	0	0	*M*	*M*
w_1	*M*	1	0	–1	1	0	1	1	–1
x_4	0	$\frac{7}{2}$	0	–1	–2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
x_1	–2	$\frac{3}{2}$	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\bar{f}_j - c_j$		–3	0	–3	1	0	1	0	–1
		M	0	$-M$	*M*	0	*M*	0	$-2M$

Во второй таблице выбираем столбец с x_3, поскольку стоящее в нем число M положительно.

Разрешающий элемент находится в столбце x_3 и строке w_1. Производим преобразования, в результате которых искусственное неизвестное w_1 выходит из базиса, уступая в нем место неизвестному x_3.

В результате получим следующую таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2
			–2	1	–1	0	0	M	M
x_3	–1	1	0	–1	1	0	1	1	–1
x_4	0	$\frac{11}{2}$	0	–3	0	1	$\frac{5}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$
x_1	–2	$\frac{3}{2}$	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\bar{f}_j - c_j$		–4	0	–2	0	0	0	–1	0
		0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$

В строке для целевой функции уже нет положительных чисел, что свидетельствует о достижении оптимального решения *M*-задачи. При этом искусственные неизвестные в базис не входят.

Последнюю таблицу без столбцов w_1 и w_2 можно рассматривать как симплекс-таблицу для задачи

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 &= 3, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0,$$

причем в ней содержится оптимальное решение этой задачи:

$$\bar{x}_{опт} = \left(\frac{3}{2}; 0; 1; \frac{11}{2}; 0\right), \quad f_{\min} = -4.$$

Так как нас интересует непосредственно лишь значения неизвестных x_1, x_2, x_3, то ответ запишется в виде:

$$\bar{x}_{опт} = \left(\frac{3}{2}; 0; 1\right), \quad f_{\min} = -4.$$

Как отмечалось в предыдущем параграфе, используются и другие формы симплексных таблиц.

Пример 3. Решить методом искусственного базиса задачу

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, \ldots, 4).$$

Решение. Составим *M*-задачу. В первое и второе уравнения введем искусственные переменные x_5 и x_6. Третье уравнение разрешено относительно «естественной» базисной переменной x_4. Вводить в него искусственную переменную нет смысла.

M-задача будет иметь вид:

$$\bar{f} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - M(x_5 + x_6) \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 &= 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 &= 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,\ldots,6).$$

Прежде чем составлять первую симплекс-таблицу, выражаем функцию $\bar{f}$ через свободные переменные:

$$\bar{f} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3 - 10 - M(15 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 20 - 2x_1 - x_2 - 5x_3) =$$
$$= 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 10 - M(-3x_1 - 3x_2 - 8x_3 + 35).$$

Теперь *M*-задачу можно записать в таблицу:

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_1	x_2	x_3
x_5	15	1	2	3
x_6	20	2	1	5
x_4	10	1	2	1
$\bar{f}$	–10	–2	–4	–4
	$-35M$	$-3M$	$-3M$	$-8M$

Разрешающий элемент можно выбирать только по элементам второй строки целевой функции. Лишь, после того как все элементы этой строки станут равными нулю, разрешающие столбцы выбирают по первой строке.

Разрешающий столбец выбран по элементу $-8M$ второй строки целевой функции. По минимальному симплексному отношению в столбце с элементом $-8M$ во второй строке целевой функции выбран разрешающий элемент 5.

После симплексного преобразования из базиса выводится искусственная переменная x_6 и исключается из дальнейших расчетов, соответствующий ей столбец опускается.

БП	СЧ	Свободные переменные	
		x_1	x_2
x_5	3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_3	4	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_4	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$
$\bar{f}$	6	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{16}{5}$
	$-3M$	$\frac{1}{5}M$	$-\frac{7}{5}M$

Преобразовав вторую таблицу с разрешающим вторым столбцом и первой строкой, выводим из базиса и вторую искусственную переменную x_5.

При этом элементы второй строки целевой функции становятся равными нулю и полученная таблица соответствует исходной задаче. В ней содержится опорный план исходной задачи $\left(0;\frac{15}{7};\frac{25}{7};\frac{15}{7}\right)$, а также значение целевой функции $f=\frac{90}{7}$.

БП	СЧ	Свободные переменные
		x_1
x_2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$
x_3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$
x_4	$\frac{15}{7}$	$\frac{6}{7}$
f	$\frac{90}{7}$	$-\frac{6}{7}$

Как видим из f-строки, план $\left(0;\frac{15}{7};\frac{25}{7};\frac{15}{7}\right)$ не оптимален, поэтому выполним еще одно симплексное преобразование:

БП	СЧ	Свободные переменные
		x_4
x_2	$\frac{5}{2}$	
x_3	$\frac{5}{2}$	
x_1	$\frac{5}{2}$	
f	15	1

Так как в f-строке последней таблицы нет отрицательных элементов, следовательно, содержащийся в ней опорный план является оптимальным.

Таким образом, $\bar{x}_{опт}=\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$, $f_{\max}=15$.

2. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

2.1. Понятие двойственности. Построение пары взаимно двойственных задач

С каждой задачей линейного программирования тесно другая задача, называемая *двойственной*. Первоначальная задача называется *прямой* или *исходной*. Совместное изучение данной задачи и двойственной к ней задачи дает, как правило, значительно больше информации, чем изучение каждой из них в отдельности.

Понятие двойственности рассмотри на примере задачи оптимального использования сырья.

На некотором предприятии после выполнения годового плана возник вопрос: как поступать с остатками сырья? Некоторые экономисты предложили наладить из оставшегося сырья производство изделий ширпотреба; другие же специалисты посоветовали продать сырье «на сторону» какой-нибудь нуждающейся в нем организации. Проведем исследование этих двух возможностей.

Пусть имеются два вида сырья S_1 и S_2, остатки которого составляют соответственно 35 и 20 единиц. Из этого сырья можно наладить производство трех видов товаров: T_1, T_2, T_3. От реализации единицы каждого вида товара завод получит прибыль: от T_1 – 7 руб., T_2 – 6 руб., T_3 – 18 руб. Нормы расхода сырья на производство товаров T_1, T_2, T_3 вместе с данными о прибыли и запасах представлены в следующей таблице:

Виды товаров	S_1	S_2	Прибыль
T_1	1	2	7
T_2	1	1	6
T_3	5	2	18
Запасы	35	20	

При исследовании первой возможности (наладить выпуск товаров T_1, T_2, T_3) возникает вопрос о плане выпуска товаров.

Пусть план выпуска задается тремя числами x_1, x_2, x_3, где x_i – количество единиц товара T_i, которое следует произвести $(i=1,2,3)$.

Чтобы наилучшим образом использовать первую возможность, необходимо решить следующую задачу линейного программирования:

$$f = 7x_1 + 6x_2 + 18x_3 \to \max; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 \le 35, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 20, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \tag{3}$$

Назовем ЗЛП (1) – (3) *задачей I*.

Исследуем теперь вторую возможность (продать сырье другой организации). Возникает следующий вопрос: по каким ценам продавать сырье? Обозначим эти цены y_1, y_2, где y_i – цена единицы сырья S_i.

Очевидно, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$. Справедливое требование к ценам со стороны продающего предприятия состоит в следующем: если взять сырье, идущее на изготовление единицы товара T_i $(i = 1,2,3)$, то выручка от его продажи должна быть не меньше, чем прибыль от реализации готового изделия. Это требование приводит к системе неравенств

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 7, \\ y_1 + y_2 &\geq 6, \\ 5y_1 + 2y_2 &\geq 18. \end{aligned}\right\}$$

Что касается покупателя, то для него единственное пожелание заключается в сокращении до минимума расходов на покупку сырья, т.е. величины $\varphi = 35y_1 + 20y_2$.

Приходим к следующей ЗЛП:

$$\varphi = 35y_1 + 20y_2 \to \min; \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 7, \\ y_1 + y_2 &\geq 6, \\ 5y_1 + 2y_2 &\geq 18. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0. \tag{6}$$

Назовем эту задачу *задачей* I'.

Задачи I и I' называются *двойственными* друг другу (*взаимно двойственными*).

Смысл, который вкладывается в это название, заключается в следующем.

1. Если первая задача имеет размеры $m \times n$ (m ограничений с n неизвестными) то вторая – размеры $n \times m$. Так, в задаче I два ограничения с тремя неизвестными, а в задаче I' – три ограничения с двумя неизвестными.

2. Матрицы из коэффициентов при неизвестных в левых частях ограничений обеих задач являются взаимно транспонированными.

3. В правых частях ограничений в каждой задаче стоят коэффициенты при неизвестных в целевой функции другой задачи.

4. В задаче I все ограничения представляют собой неравенства типа $\leq$, причем в этой задаче требуется достичь максимума f. Напротив, в задаче I' все ограничения представляют собой неравенства типа $\geq$, причем требуется достичь минимума φ.

Для построения двойственной задачи необходимо пользоваться следующими правилами:

1) если прямая задача решается на максимум, то двойственная – на минимум, и наоборот;

2) если целевая функция максимизируется, то ограничения-неравенства должны быть вида $\leq$, если минимизируется, то вида $\geq$;

3) каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, и наоборот, каждому ограничению двойственной задачи соответствует переменная прямой задачи;

4) матрица системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы системы ограничений исходной задачи транспонированием;

5) свободные члены системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи, и наоборот;

6) если на переменную прямой задачи наложено условие неотрицательности, то соответствующее ограничение двойственной задачи записывается как ограничение-неравенство, если же нет, то как ограничение-равенство;

7) если какое-либо ограничение прямой задачи записано как равенство, то на соответствующую переменную двойственной задачи условие неотрицательности не налагается.

Пример 1. Построить задачу, двойственную к задаче линейного программирования, заданной в симметричной форме записи:

$$f = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 10, \\ 2x_2 + x_3 \le 6, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Решение. Двойственная задача будет иметь две переменные y_1 и y_2, так как исходная задача содержит два ограничения. Используя общее правило записи двойственной задачи, получим:

$$\varphi = 10y_1 + 6y_2 \to \min;$$
$$\left.\begin{aligned} 2y_1 \ge 3, \\ y_1 + 2y_2 \ge 1, \\ 3y_1 + y_2 \ge 1, \end{aligned}\right\}$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0.$$

Пример 2. Построить задачу, двойственную к задаче линейного программирования, заданной в произвольной несимметричной форме:

$$f = -11x_1 + 9x_2 - 14x_3 - 10x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_4 \ge 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_4 \ge -1, \\ -x_1 + 3x_3 + 2x_4 \ge 3, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -4, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ y_4 \ge 0,\ x_2, x_3 - \text{любого знака.}$$

Решение. Сначала ограничения-неравенства вида $\geq$ умножением на число -1 сведем к ограничениям-неравенствам вида $\leq$. Получим:

$$f = -11x_1 + 9x_2 - 14x_3 - 10x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 4x_2 - x_4 \leq -4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_4 \leq 1, \\ x_1 - 3x_3 - 2x_4 \leq -3, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -4, \end{array}\right\}$$

$x_1 \geq 0$, $y_4 \geq 0$, x_2, x_3 – любого знака.

Двойственная задача имеет пять переменных y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, так как прямая задача содержит пять ограничений.

В соответствии с указанными выше правилами запишем двойственную задачу:

$$\varphi = -4y_1 + 5y_2 + y_3 - 3y_4 - 4y_5 \to \min;$$
$$\left.\begin{array}{l} -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 + y_4 - 2y_5 \geq -11, \\ 4y_1 + y_2 + 5y_3 + y_5 = 9, \\ 2y_2 - 3y_4 = -14, \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 - 3y_5 \geq -10, \end{array}\right\}$$

$y_1 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, $y_4 \geq 0$, y_2, y_3 – произвольного знака.

2.2. Теоремы двойственности

Основное неравенство теории двойственности: для любых допустимых планов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пары взаимно двойственных задач всегда справедливо неравенство $f(\bar{x}) \leq \varphi(\bar{y})$.

Теорема 1 (*достаточный признак оптимальности*). Если $\overline{x^*}$ и $\overline{y^*}$ – допустимые планы пары двойственных задач, для которых выполняется равенство $f\left(\overline{x^*}\right) = \varphi\left(\overline{y^*}\right)$, то $\overline{x^*}$ и $\overline{y^*}$ являются оптимальными планами соответствующих задач.

Теорема 2 (*теорема существования оптимальных планов*). Для существования оптимального плана любой из пары двойственных задач необходимо и достаточно существование допустимого плана для каждой из них.

Теорема 3 (*первая основная теорема двойственности*). Если одна из двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая также имеет оптимальный план, причем экстремальные значения целевых функций совпадают: $f\left(\overline{x^*}\right) = \varphi\left(\overline{y^*}\right)$.

Если одна из двойственных задач неразрешима вследствие неограниченности целевой функции на множестве допустимых решений, то система ограничений другой задачи противоречива.

Связь между задачами двойственной пары глубже, чем указано в формулировке теоремы: решая симплексным методом одну из них, получаем

решение и другой. Для этого достаточно воспользоваться соответствием между переменными пары взаимно двойственных задач и оценок в последней симплексной таблице:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+2} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{n+m} \\
\updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
y_{m+1} & y_{m+2} & \dots & y_{m+j} & \dots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \dots & y_2 & \dots & y_i & \dots & y_m \\
\Delta_1^* & \Delta_2^* & \dots & \Delta_j^* & \dots & \Delta_n^* & \Delta_{n+1}^* & \Delta_{n+2}^* & \dots & \Delta_{n+2}^* & \dots & \Delta_{n+i}^* & \dots & \Delta_{n+m}^*
\end{array}$$

Отсюда имеем оптимальный план двойственной задачи. Если прямая задача решается на максимум, то

$$y_1^* = \Delta_{n+1}^*,\ y_2^* = \Delta_{n+2}^*, \dots,\ y_i^* = \Delta_{n+i}^*,\ \dots, y_m^* = \Delta_{n+m}^*,$$
$$y_{m+1}^* = \Delta_1^*,\ y_{m+2}^* = \Delta_2^*, \dots,\ y_{m+j}^* = \Delta_j^*, \dots,\ y_{m+n}^* = \Delta_n^*.$$

Если прямая задача решается на минимум, то

$$y_i^* = -\Delta_{n+i}^*\ \ (i = \overline{1,m}),\ y_{m+j}^* = -\Delta_j^*\ \ (j = \overline{1,n}).$$

Экономический смысл первая основная теорема двойственности можно интерпретировать так: предприятию безразлично, производить продукцию по оптимальному плану $\overline{x^*}$ и получить максимальную прибыль либо продать ресурсы по оптимальным ценам $\overline{y^*}$ и возместить от продажи равные ей минимальные затраты на ресурсы.

Пример 1. Построить двойственную задачу к задаче

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \le 34, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \le 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 22, \end{array}\right\}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3;4.$$

Найти оптимальный план двойственной задачи, используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач.

Решение. Двойственная задача имеет вид:

$$\varphi = 34y_1 + 16y_2 + 22y_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 7, \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 3, \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4, \\ 5y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2, \end{array}\right\}$$
$$y_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Из теорем двойственности следует, что если решена одна из пары двойственных задач, то одновременно найдено решение и другой задачи.

Прежде, чем решить прямую задачу симплекс-методом, приведем ее к каноническому виду, добавив к левым частям неравенств ограничений неотрицательные переменные x_5, x_6, x_7.

В канонической форме ЗЛП примет вид:

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 &= 34, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_6 &= 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_7 &= 22, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1;2;3;4;5;6;7\,.$$

При решении прямой задачи последняя симплекс-таблица выглядит так (*смотри пример* 3 *параграфа* 1.3):

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	2	0	0	0
x_5	0	$\frac{32}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{5}$
x_1	7	$\frac{13}{5}$	1	0	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	3	$\frac{28}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$f_j - c_j$		35	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

В индексной строке последней таблицы нет ни одного отрицательного элемента, следовательно, содержащийся в ней план является оптимальным.

Выпишем его. Опорный план $\overline{x^*} = \left(\frac{13}{5}, \frac{28}{5}, 0, 0, \frac{32}{5}, 0, 0\right)$ является оптимальным, а соответствующее значение $f\left(\overline{x^*}\right) = 35$ целевой функции будет максимальным.

В индексной строке этой таблицы содержатся компоненты y_i^* оптимального плана двойственной задачи. Выписать компоненты y_i^* поможет соответствие между переменными двойственных задач. Чтобы установить это соответствие, преобразуем ограничения-неравенства $\left.\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\geq 7, \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 &\geq 3, \\ y_1 + 4y_2 + y_3 &\geq 4, \\ 5y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 2, \end{aligned}\right\}$ в эквивалентные уравнения, вычитая из левых частей дополнительные неотрицательные переменные y_4, y_5, y_6, y_7, равные разностям между левыми и правыми частями этих неравенств.

Тогда двойственная задача запишется в виде:

$$\varphi = 34y_1 + 16y_2 + 22y_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 - y_4 &\geq 7, \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 - y_5 &\geq 3, \\ y_1 + 4y_2 + y_3 - y_6 &\geq 4, \\ 5y_1 + y_2 + 2y_3 - y_7 &\geq 2, \end{aligned}\right\}$$
$$y_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4,5,6,7\,.$$

В этой записи переменные y_4, y_5, y_6 и y_7 являются базисными, а y_1, y_2, y_3 – свободными. В исходной задаче переменные x_1, x_2, x_3, x_4 являются свободными, а x_5, x_6, x_7 – базисными.

Соответствие, о котором шла речь выше, устанавливается путем сопоставления базисным переменным одной задачи свободных переменных двойственной задачи, и наоборот, т.е.

$$\overbrace{\begin{matrix} x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \underbrace{y_1 \quad y_2 \quad y_3}_{СП} \end{matrix}}^{БП} \qquad \overbrace{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \underbrace{y_4 \quad y_5 \quad y_6 \quad y_7}_{БП} \end{matrix}}^{СП}$$

Воспользуемся этим соответствием и перепишем симплекс-таблицу следующим образом:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	2	0	0	0
x_5	0	$\frac{32}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{5}$
x_1	7	$\frac{13}{5}$	1	0	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	3	$\frac{28}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$f_j - c_j$		35	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

Из этой таблицы получаем оптимальный план $\overline{y^*}$ двойственной задачи: $y_1^* = 0$, $y_2^* = \frac{3}{2}$, $y_3^* = \frac{1}{2}$, $y_4^* = 0$, $y_5^* = 0$, $y_6^* = \frac{5}{2}$, $y_7^* = \frac{1}{2}$., т.е. $\overline{y^*} = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Из теоремы 3 следует, что экстремальные значения целевых функций разрешимых двойственных задач совпадают, поэтому

$$\varphi_{\min} = f_{\max} = 35.$$

Пример 2. Дана следующая ЗЛП:

$$f = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{matrix} 4x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3, \end{matrix}\right\}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Найти решение задачи через решение двойственной задачи к ней.

Решение. По правилам построения двойственной задачи получаем, что двойственная задача к исходной задаче имеет следующий вид:

$$\varphi = y_1 + 3y_2 \to \max;$$
$$\left.\begin{matrix} 4y_1 + 4y_2 \leq 3, \\ y_1 + 2y_2 \leq 3, \\ -y_1 - 3y_2 \leq 4, \end{matrix}\right\}$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0.$$

Введя неотрицательные переменные y_3, y_4, y_5, приведем двойственную задачу к каноническому виду:

$$\varphi = y_1 + 3y_2 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} 4y_1 + 4y_2 + y_3 &= 3, \\ y_1 + 2y_2 + y_4 &= 3, \\ -y_1 - 3y_2 + y_5 &= 4, \end{aligned}\right\}$$
$$y_i \geq 0, \ (i = \overline{1,5}).$$

Построим симплекс-таблицу полученной канонической задачи:

БП	СЧ	Свободные переменные	
		y_1	y_2
y_3	3	4	4
y_4	3	1	2
y_5	4	–1	–3
φ	0	–1	–3

Первый столбец (БП) – столбец базисных переменных; второй столбец (СЧ) – столбец свободных членов ограничений; в первой строке – свободные переменные y_1, y_2; в последней (φ-строке) – коэффициенты целевой функции с противоположными знаками.

В столбце свободных членов нет отрицательных элементов, план – допустимый. В φ-строке есть отрицательные элементы, значит, план не оптимальный.

В качестве разрешающего столбца выбираем четвертый (с наибольшим по модулю отрицательным элементом). Находим наименьшее положительное отношение элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца:

$$\min\left\{\frac{3}{4}; \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, разрешающей будет вторая строка.

Для улучшения плана необходимо выполнить жорданову перестановку пары (y_3, y_2) с разрешающим элементом 4.

В результате получим следующую симплекс-таблицу:

БП	СЧ	Свободные переменные	
		y_1	y_3
y_2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$
y_4	$\frac{3}{2}$	–1	$-\frac{1}{2}$
y_5	$\frac{25}{4}$	2	$\frac{3}{4}$
φ	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{3}{4}$

В φ-строке нет отрицательных элементов. Следовательно, получен оптимальный план $\overline{y^*}=\left(0;\frac{3}{4};0;\frac{3}{2};\frac{25}{4}\right)$. $\varphi_{\max}=\varphi\left(0;\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{4}$.

Поскольку исследуемая двойственная задача имеет оптимальный план и $\varphi_{\max}=\frac{9}{4}$, то, согласно первой теореме двойственности, и исходная к ней задача обладает оптимальным планом и $f_{\min}=\frac{9}{4}$

Теорема 4 (*вторая теорема двойственности*). Для того чтобы планы $\overline{x^*}$ и $\overline{y^*}$ пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i^*-c_j\right)=0,$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^*-b_i\right)=0.$$

Эти условия называются *условиями дополняющей нежесткости.*

Из них следует: если $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^*<b_i$, то $y_i^*=0$ $(i=\overline{1,m})$; если $y_i^*>0$, то $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^*=b_i$ $(i=\overline{1,m})$. Точно так же, если $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i^*>c_j$ $(j=\overline{1,n})$, то $x_j^*=0$; если $x_j^*>0$, то $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i^*=c_j$ $(j=\overline{1,n})$.

Экономически это означает, что если по некоторому оптимальному плану $\overline{x^*}$ производства расход i-го ресурса строго меньше его запаса b_i, то в оптимальном плане соответствующая двойственная оценка единицы этого ресурса равна нулю. Если же в некотором оптимальном плане оценок его i-я компонента строго больше нуля, то в оптимальном плане производства расход соответствующего ресурса равен его запасу.

Таким образом, двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а избыточный ресурс (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.

Теорема 5 (*третья теорема двойственности*). В оптимальном решении двойственной задачи значения переменных y_i^* (оценок) численно равны частным производным $y_i^*=\partial f_{\max}/\partial b_i$ $(i=\overline{1,m})$ для исходной задачи.

Двойственные оценки показывают приращение целевой функции, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения ЗЛП, т.е. $y_i^*=\partial f_{\max}/\partial b_i$ $(i=\overline{1,m})$.

Из теоремы 5 следует, что двойственная оценка численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего ресурса на единицу.

Двойственные оценки часто называют *скрытными, теневыми* или *маргинальными оценками ресурсов.*

Пример 3. На предприятии имеется четыре вида сырья в количествах: вида A – 18 единиц; вида B – 16; вида C – 8 и вида D – 6 единиц. Нормы затрат каждого вида сырья на единицу продукции вида № 1 составляют соответственно 1; 2; 1; 0; вида № 2 – соответственно 2; 1; 1;1 и № 3 – соответственно 1; 1; 0; 1. Прибыль от реализации одной единицы продукции № 1 равна 3 руб., № 2 – 4 руб., № 3 – 2 руб. Составить план производства трех видов продукции, при котором доход предприятия от реализации всей продукции был бы максимальным. Найти двойственные оценки и сделать анализ решения.

Решение. Обозначим количество выпускаемых изделий вида № 1 через x_1, изделий вида № 2 через x_2 и изделий вида № 3 через x_3.

Экономико-математическая модель задачи имеет вид:

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 18,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 16,\\ x_1 + x_2 &\le 8,\\ x_2 + x_3 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3.$$

Оценки двойственной задачи обозначим через y_i $(i = 1,...,4)$, y_1 – оценка 1 единицы сырья A, y_2 – B, y_3 – C, y_4 – D.

Экономико-математическая модель двойственной задачи примет вид:

$$\varphi = 18y_1 + 16y_2 + 8y_3 + 6y_4 \to \min;$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\ge 3,\\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\ge 4,\\ y_1 + y_2 + y_4 &\ge 2, \end{aligned}\right\}$$

$$y_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4.$$

Решим исходную задачу симплексным методом. Введя неотрицательные переменные x_4, x_5, x_6, x_7, приведем задачу к каноническому виду:

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\le 18,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &\le 16,\\ x_1 + x_2 + x_6 &\le 8,\\ x_2 + x_3 + x_7 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$$

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_1	x_2	x_3
x_4	18	1	2	1
x_5	16	2	1	1
x_6	8	1	1	0
x_7	6	0	1	1
f	0	–3	–4	–2

После первого шага симплексных преобразований будем иметь:

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_1	x_7	x_3
x_4	6	1	–2	–1
x_5	10	2	–1	0
x_6	2	1	–1	–1
x_2	6	0	1	1
f	24	–3	4	2

После второго шага симплексных преобразований получим:

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_6	x_7	x_3
x_4	4	–1	–1	0
x_5	6	–2	1	2
x_1	2	1	–1	–1
x_2	6	0	1	1
f	30	3	1	–1

После третьего шага симплексных преобразований будем иметь:

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_6	x_7	x_5
x_4	4	–1	–1	0
x_3	3	–1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	3	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
f	33	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Оптимальный план исходной задачи имеет вид:

$$\overline{x^*} = (x_1^*; x_2^*; x_3^*; x_4^*; x_5^*; x_6^*; x_7^*) = (5;3;3;4;0;0;0).$$

Значение целевой функции для этого плана $f_{\max} = 33$.

С учетом соответствия между переменными пары взаимно двойственных задач запишем значения двойственных оценок:

$$y_1^* = 0,\ y_2^* = \frac{1}{2},\ y_3^* = 2,\ y_4^* = \frac{3}{2}.$$

Оценка для сырья вида A рана нулю, так как сырье этого вида в оптимальном плане используется не полностью. Для сырья остальных видов

оценки положительны, что указывает на полное использование сырья видов B,C,D.

Полученные значения оценок удовлетворяют всем условиям двойственной задачи.

$$\varphi_{\min} = 18\cdot 0 + 16\cdot\frac{1}{2} + 8\cdot 2 + 6\cdot\frac{3}{2} = 33.$$

Система ограничений при подстановке оптимальных значений оценок выполняется:

$$\left.\begin{array}{l} 0 + 2\cdot\dfrac{1}{2} + 2 = 3, \\ 2\cdot 0 + \dfrac{1}{2} + 2 + \dfrac{3}{2} = 4, \\ 0 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2. \end{array}\right\}$$

Очевидно, ограничения двойственной задачи выполняются как строгие равенства. Проведем анализ решения с учетом двойственных оценок.

Увеличение объема сырья B на одну единицу позволило бы получить оптимальный план, для которого доход увеличился бы на 0,5 руб., а увеличение объема сырья C на одну единицу дало бы увеличение дохода на 2 руб.

Аналогично при увеличении объема сырья D на одну единицу доход увеличится на 1,5 руб. Понятна и нулевая оценка, полученная для сырья A: $y_1^* = 0$. Поскольку сырье A не полностью используется, то дальнейшее увеличение объема этого вида сырья не повлияет на оптимальный план производства и на сумму дохода.

По оценкам можно судить о дефицитности ресурсов или сырья. Самые высокие значения оценок указывают на более дефицитные виды сырья.

В нашем случае наиболее дефицитным сырьем является сырье вида C, для которого двойственная оценка $y_3^* = 2$.

Менее дефицитным является сырье вида B, для которого оценка $y_2^* = \frac{1}{2}$. Совсем недефицитным (избыточным) является сырье вида A, для которого оценка $y_1^* = 0$.

3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

3.1. Постановка транспортной задачи по критерию стоимости и построение ее начального опорного плана

Рассмотрим следующую задачу, называемую *транспортной задачей* (ТЗ).

Имеется m поставщиков A_1, A_2, …, A_m, у которых сосредоточены запасы однородного груза в количестве a_1, a_2, …, a_m единиц соответственно. Этот груз нужно доставить n потребителям B_1, B_2, …, B_n, заказавшим b_1, b_2, …, b_n единиц этого груза соответственно. Известны также все *тарифы перевозок* груза c_{ij} (стоимость перевозок единицы груза) от поставщика A_i к потребителю B_j. Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость всех перевозок была бы минимальной.

Неизвестными в нашей задаче являются mn неотрицательных чисел x_{ij} $(i=1,...,m; j=1,...,n)$, где x_{ij} – количество груза, отправляемого поставщиком A_i потребителю B_j.

Матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$ называется *матрицей тарифов*.

Планом транспортной задачи называют матрицу $X=(x_{ij})_{m\times n}$. Ее называют еще *матрицей перевозок*.

Транспортная задача называется *закрытой* или *задачей с правильным балансом*, если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \qquad (1)$$

Если же условие (1) нарушается, то ТЗ называется *открытой*.

Если задача является открытой, то необходимо провести *процедуру закрытия задачи.* С этой целью при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ добавляем *фиктивного поставщика* A'_{m+1} с запасом груза $a'_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Если же $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то добавляем *фиктивного потребителя* B'_{n+1} с заказом груза $b'_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

В обоих случаях соответствующие фиктивным объектам тарифы перевозок c'_{ij} полагаем равными нулю. В результате суммарная стоимость перевозок не изменится.

Для наглядности условия ТЗ представим в виде таблицы, называемой *распределительной* или *транспортной.* При этом предполагаем, рассматривается закрытая транспортная задача.

Поставщик	Потребитель			Запас груза
	B_1	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе	b_1	…	b_n	

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией перевозок, можно представить целевой функцией

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ . \qquad (2)$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (3)$$

и ограничениям по потребностям

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}) \, . \qquad (4)$$

Поскольку обратные перевозки не предполагаются, то

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n) \, . \qquad (5)$$

Математически транспортная задача формулируется следующим образом: среди множества решений системы линейных уравнений (3), (4) и неравенств (5) найти такое решение $(x_{11}^*; x_{12}^*; \ldots; x_{mn}^*)$, которое доставляет минимум линейной функции (2).

Необходимым и достаточным условием решения ТЗ в области допустимых решений является условие (1).

Таким образом, ТЗ является ЗЛП и ее можно решать симплекс-методом. Но специфические особенности систем уравнений (3), (4) дают возможность использовать метод решения более простой, чем симплексный.

Особенности систем уравнений (3), (4) следующие:

1) коэффициенты при неизвестных во всех уравнениях равны 1;

2) каждая переменная встречается только в двух уравнениях;

3) система уравнений ТЗ симметрична относительно всех переменных x_{ij};

4) матрица, составленная из коэффициентов при переменных x_{ij} $(i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n)$, состоит из единиц и нулей, причем каждый столбец матрицы содержит два элемента, равных 1, а остальные – 0.

При решении транспортной задачи важное значение имеет следующая теорема.

Теорема (*о ранге матрицы ТЗ*). Ранг матрицы системы ограничительных уравнений (3), (4) ТЗ на единицу меньше числа уравнений, т.е. $r = m + n - 1$.

Из этой теоремы следует, что каждый опорный план должен иметь $mn - r = mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$ свободных переменных, равных нулю, $m + n - 1$ базисных переменных.

Будем строить план перевозок непосредственно в транспортной таблице. Если число занятых клеток удовлетворяют условию $m + n - 1$, то план перевозок называют *невырожденным*, а если число занятых клеток не удовлетворяет этому условию, то план перевозок называют *вырожденным*.

При решении транспортной задачи используется прием последовательного улучшения плана, предусматривающий следующие этапы:

1) построение начального опорного плана;

2) оценка этого плана;

3) переход от имеющегося опорного плана к новому опорному плану с меньшими транспортными затратами.

Существуют различные способы реализации указанных этапов решения ТЗ. Сюда можно отнести *правило* «*северо-западного угла*», *правило* «*минимального элемента*», *метод Фогеля*, *метод потенциалов* и др.

Рассмотрим вопрос составления первоначального плана перевозок с помощью метода «северо-западного угла». Проиллюстрируем это на примере.

Пример 1. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны b_j, $j = 1,2,3,4$. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны a_i, $i = 1,2,3$. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок представлены в следующей таблице:

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	8	10	5	160
A_2	4	6	2	3	30
A_3	4	4	6	5	90
Потребность в грузе	100	40	80	60	

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Решение. Составление первоначального плана перевозок начнем с перевозки поставщика A_1. Будем за счет его запасов максимально возможно удовлетворять заказы сначала потребителя B_1, затем B_2 и так далее. Таким образом, мы будем заполнять таблицу, начиная с клетки $(1,1)$, и двигаться вправо по строке до тех пор, пока остаток запасов поставщика A_1 не окажется

меньше заказа очередного потребителя. Для выполнения этого заказа используем остатки запаса первого поставщика, а недостающую часть добавим из запасов поставщика A_2, то есть переместимся на следующую строку таблицы по столбцу, соответствующему указанному потребителю. Далее аналогичным образом распределим запасы поставщика A_2, затем A_3 и так далее.

В результате загруженные клетки расположатся вдоль диагонали $(1,1) - (m,n)$, поэтому способ «северо-западного угла» называют еще *диагональным способом*.

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8 40	10 20	5	160
A_2	4	6	2 30	3	30
A_3	4	4	6 30	5 60	90
Потребность в грузе	100	40	80	60	

Распределяя запасы поставщика A_1 сначала потребителю B_1, а затем B_2, получим: $x_{11}=100$, $x_{12}=40$. После этого у поставщика A_1 остается еще 20 единиц груза, а потребителю B_3 нужно 80 единиц. Удовлетворим спрос потребителя B_3, отправив ему 20 единиц груза, оставшихся у поставщика A_1, 30 единиц груза от поставщика A_2 и 30 единиц груза от поставщика A_3. Следовательно, $x_{13}=20$, $x_{23}=30$, $x_{33}=30$.

У поставщика A_3 остается 60 единиц груза. Этот груз и отправим потребителю B_4. Таким образом, $x_{34}=60$.

Все запасы груза вывезены и все потребители удовлетворены. Общая стоимость перевозок по данному плану: $f=4\cdot100+8\cdot40+10\cdot20+2\cdot30+6\cdot30+5\cdot60=1460$ ден. ед.

Существенным недостатком метода «северо-западного угла» является игнорирование при загрузке клеток тарифов c_{ij}, поэтому построенный опорный план обычно оказывается весьма далеким оптимального.

Рассмотри сейчас вопрос составления первоначального плана перевозок с помощью правила «минимального элемента».

Построение плана начинается с клетки с наименьшим тарифом перевозок. При наличии нескольких клеток с одинаковыми тарифами выберем любую из них. Пусть это клетка (i,j). Запишем в этой клетке элемент $x_{ij}=\min(a_i,b_j)$. Если $a_i<b_j$, то запасы поставщика A_i исчерпаны, а потребителю

потребуется еще $b_j'' = b_j - a_i$ единиц груза. Не принимая более во внимание i-ю строку, снова ищем клетку с наименьшей стоимостью перевозок и заполняем ее с учетом изменившихся потребностей.

В случае $a_i > b_j$ из рассмотрения исключается j-й столбец, а запасы поставщика A_i полагаются равными $a_i'' = a_i - b_j$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности удовлетворены.

Заметим, что при наличии в таблице клеток с одинаковыми тарифами, планы, полученные с помощью этого метода, могут быть разными, но они, несомненно, ближе к оптимальному плану, чем план, составленный с помощью метода «северо-западного угла».

Пример 2. По условиям примера 1 составить опорный план способом «минимального элемента».

Решение. Поскольку наименьший тариф (число 2) стоит в клетке $(2,3)$, то запишем в эту клетку элемент $x_{23} = 30$. Тогда $b_3'' = 50$, а 2-ю строку таблицы можно больше не учитывать.

Среди оставшихся клеток имеются три клетки с наименьшим тарифом перевозок, равным 4: $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$. Выберем, например, клетку $(1,1)$ и запишем в нее число $x_{11} = 100$. Получим, что $a_1'' = 60$, а первый столбец больше не рассматриваем. Теперь наименьший тариф, равный 4, поставлен в клетке $(3,2)$, поэтому $x_{32} = 40$, $b_3'' = 50$ и 2-й столбец больше не рассматриваем.

Далее выбираем клетку $(1,4)$ с тарифом 5 и записываем в ней $x_{14} = 60$. Исключаем из рассмотрения 1-ю строку и 4-й столбец, так как $a_1'' = b_4 = 60$. Переходим к последней клетке $(3,3)$, в которую записываем перевозку $x_{33} = 50$.

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8	10	5 60	160
A_2	4	6	2 30	3	30
A_3	4	4 40	6 50	5	90
Потребность в грузе	100	40	80	60	

Общая стоимость перевозок по данному плану:

$$f = 4 \cdot 100 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 30 + 6 \cdot 50 + 5 \cdot 60 = 1220 \text{ ден. ед.}$$

Пример 3. Транспортная задача задана таблицей:

Поставщик	Потребитель					Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	5	1	3	2	100
A_2	3	4	7	6	8	50
A_3	2	3	5	9	8	20
A_4	1	4	6	7	9	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	

Требуется: а) составить математическую модель ТЗ; б) привести задачу к сбалансированному (закрытому) виду; в) построить опорный план методом «северо-западного угла»; г) построить опорный план методом «минимального элемента».

Решение. Пусть x_{ij} – объем перевозки от поставщика A_i к потребителю B_j.

Поставщик	Потребитель					Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4 x_{11}	5 x_{12}	1 x_{13}	3 x_{14}	2 x_{15}	100
A_2	3 x_{21}	4 x_{22}	7 x_{23}	6 x_{24}	8 x_{25}	50
A_3	2 x_{31}	3 x_{32}	5 x_{33}	9 x_{34}	8 x_{35}	20
A_4	1 x_{41}	4 x_{42}	6 x_{43}	7 x_{44}	9 x_{45}	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией перевозок, можно представить целевой функцией

$$f = 4x_{11} + 5x_{12} + x_{13} + 3x_{14} + 2x_{15} + 3x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} + 6x_{24} + 8x_{25} + \\ + 2x_{31} + 3x_{32} + 5x_{33} + 9x_{34} + 8x_{35} + x_{41} + 4x_{42} + 6x_{43} + 7x_{44} + 9x_{45}. \quad (6)$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 20, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 20. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по потребностям

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}&=20,\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}&=20,\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}&=40,\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}&=60,\\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}&=40. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Поскольку обратные перевозки не предполагаются, то

$$x_{ij}\geq 0 \quad (i=1,\ldots,4;\ j=1,\ldots,5). \qquad (9)$$

Математическую модель транспортной задачи можно сформулировать так: среди множества решений систем линейных уравнений (7), (8) и неравенств (9) найти такое решение, которое доставляет минимум линейной функции (7).

б) Суммарные запасы поставщиков равны $\sum_{i=1}^{4} a_i = 100+50+20+20=190$, а суммарные заявки потребителей равны $\sum_{j=1}^{5} b_j = 20+20+40+60+40=180$. Поскольку $\sum_{i=1}^{4} a_i \neq \sum_{j=1}^{5} b_j$, то задача открытая (несбалансированная).

Так как $\sum_{i=1}^{4} a_i > \sum_{j=1}^{5} b_j$, то для сбалансированности задачи вводим фиктивного потребителя с заявкой $\sum_{i=1}^{4} a_i - \sum_{j=1}^{5} b_j = 190-180=10$ и нулевыми тарифами перевозок.

Сбалансированная задача примет вид:

Поставщик	Потребитель						Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	4	5	1	3	2	0	100
A_2	3	4	7	6	8	0	50
A_3	2	3	5	9	8	0	20
A_4	1	4	6	7	9	0	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	10	190

в) Построение опорного плана методом «северо-западного угла» начнем с левой верхней клетки.

Рассмотрим клетку $(1,1)$. Так как $\min\{a_1;b_1\}=\min\{100;20\}=20$, то в эту клетку заносим $x_{11}=20$. Заявка первого потребителя удовлетворена. Поэтому первый столбец далее не рассматриваем.

Движемся по первой строке к клетке $(1,2)$. У первого поставщика осталось $a_1'=80$ единиц запаса груза, поэтому в рассматриваемую клетку

заносим $\min\{a_1';b_2\}=\min\{80;20\}=20=x_{12}$. Заявка второго потребителя удовлетворена полностью, второй столбец далее не рассматриваем.

Переходим к клетке (1,3). У первого поставщика осталось $a_1''=60$ единиц запаса груза, поэтому в рассматриваемую клетку заносим $\min\{a_1'';b_3\}=\min\{60;40\}=40=x_{13}$. Заявка третьего потребителя удовлетворена, поэтому третий столбец далее не рассматриваем.

Переходим далее к клетке (1,4). У первого поставщика осталось $a_1'''=20$ единиц запаса груза, поэтому в рассматриваемую клетку заносим $\min\{a_1''';b_4\}=\min\{20;60\}=20=x_{14}$. Поскольку запасы первого поставщика исчерпаны, первую строку исключаем из рассмотрения.

Заявка четвертого потребителя не удовлетворена. Переходим к клетке (2,4). Четвертому потребителю требуется еще $b_4'=40$ единиц груза, поэтому в клетку (2,4) заносим $\min\{a_2;b_4'\}=\min\{50;40\}=40=x_{24}$. Заявка четвертого потребителя удовлетворена. Исключаем четвертый столбец из дальнейшего рассмотрения.

Переходим к клетке (2,5). У второго поставщика осталось $a_2'=10$ единиц запаса груза, поэтому в клетку (2,5) заносим $\min\{a_2';b_5\}=\min\{10;40\}=10=x_{25}$. Запасы второго поставщика исчерпаны. Вторую строку далее не рассматриваем.

Переходим к третьей строке. Движемся к клетке (3,5). Пятому потребителю требуется еще $b_5'=30$ единиц груза, поэтому в клетку (3,5) заносим $\min\{a_3;b_5'\}=\min\{20;30\}=20=x_{35}$. Запасы третьего поставщика исчерпаны, третью строку исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Заявка пятого потребителя не удовлетворена. Ему требуется еще $b_5''=10$ единиц груза. Поэтому в клетку (4,5) заносим $\min\{a_4;b_5''\}=\min\{20;10\}=10=x_{45}$. Исключаем пятый стол из рассмотрения.

Переходим к клетке (4,6). У четвертого поставщика осталось $a_4'=10$ единиц запаса груза. В клетку (4,5) заносим $\min\{a_4';b_6\}=\min\{10;10\}=10=x_{46}$.

Таким образом, имеем:

Поставщик	Потребитель						Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	4 20	5 20	1 40	3 20	2	0	100
A_2	3	4	7	6 40	8 10	0	50
A_3	2	3	5	9	8 20	0	20
A_4	1	4	6	7	9 10	0 10	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	10	190

Для того чтобы план был опорным, необходимо и достаточно, чтобы число заполненных клеток было равно $m+n-1$, где m – число поставщиков, n – число потребителей. В нашем случае $m+n-1=4+6-1=9$, число заполненных клеток равно 9. Таким образом, построен опорный план.

Заметим, что в случае, когда заполненных клеток меньше $m+n-1$, в незаполненные клетки (как правило, с наименьшим не нулевым тарифом) вводится нулевая поставка 0^*. В дальнейших расчетах эта клетка считается заполненной.

г) Построим опорный план методом «минимального элемента».

Выберем наименьший тариф, например, $c_{16}=0$. В клетку $(1,6)$ заносим $\min\{a_1;b_6\}=\min\{100;10\}=10=x_{16}$. Заявка шестого потребителя удовлетворена. Шестой столбец больше не рассматриваем.

Среди оставшихся клеток имеются две клетки с наименьшим тарифом перевозок, равным 1: $(4,1)$, $(1,3)$. Выберем, например, клетку $(4,1)$ и заносим в нее $\min\{a_4;b_1\}=\min\{20;20\}=20=x_{41}$. Заявка первого потребителя удовлетворена, запас четвертого поставщика исчерпан. Поэтому исключаем из дальнейшего рассмотрения первый столбец и четвертую строку.

Среди оставшихся клеток минимальный тариф $c_{13}=1$. В клетку $(1,3)$ заносим $\min\{a_1';b_3\}=\min\{90;40\}=40=x_{13}$. Заявка третьего потребителя удовлетворена, исключаем из дальнейшего рассмотрения третий столбец.

Теперь наименьший тариф, равный 2, поставлен в клетке $(1,5)$. В эту клетку заносим $\min\{a_1'';b_5\}=\min\{50;40\}=40=x_{15}$. Заявка пятого потребителя удовлетворена, исключаем из рассмотрения пятый столбец.

Среди оставшихся клеток имеются две клетки с наименьшим тарифом перевозок, равным 3: $(1,4)$, $(3,2)$. Выберем, например, клетку $(3,2)$ и заносим в нее $\min\{a_3;b_2\}=\min\{20;20\}=20=x_{32}$. Далее не рассматриваем второй столбец и третью строку, так как заявка второго потребителя удовлетворена, запас третьего поставщика исчерпан.

Среди оставшихся клеток минимальный тариф, равный 3, содержится в клетке $(1,4)$. Заносим в эту клетку $\min\{a_1''';b_4\}=\min\{10;60\}=10=x_{14}$.

Поскольку запасы первого поставщика исчерпаны, то первую строку далее не рассматриваем.

Остался тариф $c_{24}=6$. В клетку $(2,4)$ заносим $\min\{a_2;b_4'\}=\min\{50;50\}=50=x_{24}$.

Полученный план ТЗ не является опорным, поскольку $m+n-1=4+6-1=9$, а заполнено 7 клеток. Для получения опорного плана в таблицу введем две нулевые поставки 0^*, например, в клетки $(1,2)$, $(3,3)$, после чего эти клетки будем считать заполненными.

Получен следующий опорный план ТЗ:

Поставщик	Потребитель						Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	4	5 0^*	1 40	3 10	2 40	0 10	100
A_2	3	4	7	6 50	8	0	50
A_3	2	3 20	5 0^*	9	8	0	20
A_4	1 20	4	6	7	9	0	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	10	190

3.2. Метод потенциалов

Сущность метода потенциалов заключается в следующем. По данному опорному плану, у которого число занятых клеток равно $m+n-1$, каждому поставщику (каждой строке) ставится в соответствие некоторое число u_i $(i=1,...,m)$, называемое *потенциалом поставщика* A_i, а каждому потребителю (каждому столбцу) – некоторое число v_j, называемое *потенциалом потребителя* B_j $(j=1,...,n)$. Потенциалы выбираются так, чтобы их сумма в каждой загруженной клетке была равна тарифу перевозки единицы груза. Если клетка (i, j) – базисная (занятая), то

$$u_i + v_k = c_{ik}.$$

Соотношения $u_i + v_j = c_{ij}$ являются системой, в которую входит $m+n-1$ линейных уравнений с $m+n$ неизвестными. Эта система является совместной, причем одно из неизвестных можно положить равным нулю (обычно $u_1 = 0$). После этого все переменные определяются однозначно. В большинстве задач нахождение потенциалов может быть осуществлено устно.

Поскольку количество всех чисел u_i и v_j составляет $m+n$, а занятых клеток $m+n-1$, то для определения чисел u_i и v_j придется решать систему из $m+n-1$ уравнений с $m+n$ неизвестными. Полагая, например, $u_1 = 0$, находим остальные потенциалы.

Теорема. Если для опорного плана $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, транспортной задачи существует система из $m+n$ чисел u_i и v_j, удовлетворяющих условиям

$$u_i + v_j = c_{ij} \ для \ x_{ij} > 0$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \ для \ x_{ij} = 0,$$

то $X = (x_{ij})$ – оптимальный план транспортной задачи.

Таким образом, для установления оптимальности опорного плана требуется:

1) для всех заполненных клеток ($x_{ij} > 0$) из соотношений $u_i + v_j = c_{ij}$ вычислить потенциалы поставщиков u_i, $i = \overline{1,m}$, и потенциалы потребителей v_j, $j = \overline{1,n}$.

2) затем для проверки оптимальности плана вычисляем оценки свободных клеток по формуле

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j),$$

т.е. вычисляем разность между тарифом и суммой потенциалов строки и столбца.

Проверяется выполнение условия $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$ (где s_{ij} — характеристика каждой свободной клетки таблицы) для всех незаполненных клеток $(i; j)$. Если для всех свободных клеток таблицы условие $s_{ij} \geq 0$ выполнено, то, в соответствии с теоремой, построенный опорный план транспортной задачи является оптимальным и решение задачи завершено. В противном случае переходят к следующему шагу алгоритма – улучшению опорного плана.

С целью улучшения опорного плана из множества всех свободных клеток с отрицательными оценками $s_{ij} < 0$ нужно выбрать наименьшее (наибольшее по абсолютной величине). Для клетки, в которой находится это число s_{ij}, нужно построить цикл.

Циклом в распределительной таблице называется замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем к каждой вершине подходят ровно два ребра, одно по строке, а другое – по столбцу (если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами).

Если существует несколько свободных клеток таблицы, в которых выполняется неравенство $s_{ij} < 0$, то клетку с наименьшим значением $s_{ij} < 0$ будем называть перспективной и выполним следующие действия.

В таблице строим цикл, одна вершина которого находится в перспективной свободной клетке (r, p), а все остальные вершины – в заполненных клетках. Каждой вершине цикла присваиваем поочередно знаки плюс или минус, при этом вершине в перспективной клетке (r, p) присваиваем знак плюс, следующей за ней вершине цикла – знак минус, следующей вершине – знак плюс и т.д. (т.е. свободной клетке условно приписываем знак «+», тогда следующей клетке по ходу часовой или против часовой стрелки – знак «–» и т. д.; знаки чередуются).

Следующий шаг – перераспределение груза по циклу.

Пусть Q – наименьшее из чисел x_{ij}, стоящих в клетках, которым присвоен знак минус, и пусть это число находится в клетке (k,l), $Q = x_{kl}$ (в

случае существования нескольких клеток, содержащих одно и то же число Q, можно выбрать любую из них). Далее транспортная таблица преобразуется следующим образом:

- клетки, не содержащие вершины цикла, остаются без изменения;
- в клетки цикла, отмеченные знаком плюс, записывается число $x_{ij} + Q$;
- клетка (k,l) считается незаполненной, а в остальные клетки (i, j), отмеченные знаком минус, записывается число $x_{ij} - Q$.

В результате указанных перемещений грузов в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, определяют новый опорный план транспортной задачи.

Если в минусовых клетках имеется два (или более) одинаковых чисел x_{ij}, то освобождают лишь одну из таких клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми поставками).

Полученный новый опорный план транспортной задачи проверяют на оптимальность. Для этого снова определяют потенциалы пунктов отправления и назначения и находят числа s_{ij} для всех свободных клеток. Если среди этих чисел не окажется отрицательных, то это свидетельствует о получении оптимального плана. Если же отрицательные числа имеются, то следует перейти к новому опорному плану. В результате итерационного процесса после конечного числа шагов получают оптимальный план задачи.

Если для свободных клеток все оценки $s_{ij} \geq 0$. То полученный опорный план перевозок оптимален. При наличии хотя бы одной оценки $s_{ij} < 0$ в число базисных клеток вводят клетку, для которой оценка s_{ij} минимальна. Для такой клетки строится цикл и производится перемещение груза так, чтобы баланс цикла сохранялся.

В примере 3 отрицательных вершинах цикла определяем наименьшую загрузку клетки, т. е. min(20,30) □ 20 единиц. Количество груза, равное 20 единицам, прибавляем к поставщикам в клетках со знаком «+» и вычитаем это количество груза из поставок в клетках со знаком «–». В результате такого перемещения груза баланс цикла не нарушается, хотя изменяются загрузки клеток.

Пример 4. Построить оптимальный план для задачи, исходные данные которой приведены в следующей таблице:

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	23	14	20	34
A_2	12	21	25	15	35
A_3	15	25	21	17	58
Потребности	21	49	26	31	127

При решении примера вначале нужно убедиться в том, что рассматриваемая задача является задачей с закрытой моделью.

Приступаем теперь к нахождению начального опорного плана методом минимального элемента.

Находим клетку с наименьшим тарифом. Это клетка (1,2). Так как $a_2 = 35$, а $b_1 = 21$, то $x_{21} = \min(a_2, b_1) = \min(35,21) = 21$. Загружаем в клетку (1,2) число 21 (см. таблицу 4). При этом спрос потребителя B_1 оказывается полностью удовлетворенным и мы закрываем первый столбец. Исходное значение запаса $a_2 = 35$ корректируем на 21 и получаем $a'_2 = a_2 - x_{21} = 35 - 21 = 14$.

Просматриваем множество оставшихся незакрытых клеток (т.е. все клетки кроме первого столбца) и находим клетку с наименьшим тарифом. Это клетка (1,3). В эту клетку загружаем число $x_{13} = \min(a_1, b_3) = \min(34,26) = 26$ Теперь спрос потребителя B_3 исчерпан полностью и мы закрываем третий столбец. Величину запаса поставщика A_1 корректируем на $x_{13} = 26$` и получаем $a'_1 = a_1 - x_{13} = 34 - 26 = 8$.

Из множества оставшихся незакрытых клеток снова выбираем клетку с наименьшим тарифом. Это клетка (2,4). Загружаем ее числом $x_{24} = \min(a'_2, b_4) = \min(14,31) = 14$. Закрываем вторую строку и корректируем величину спроса потребителя B_4, получая $b'_4 = b_4 - x_{24} = 31 - 14 = 17$.

Из четырех оставшихся незакрытых клеток наименьший тариф у клетки (3,4). Загружаем $x_{34} = \min(a_3, b'_4) = \min(58,17) = 17$. Четвертый столбец закрываем, корректируем значение запаса $a'_3 = a_3 - x_{34} = 58 - 17 = 41$.

Остались клетки (1,2) и (3,2). Наименьший тариф у клетки (1,2). Находим $x_{12} = \min(a'_1, b_2) = \min(8,49) = 8$. Закрываем первую строку. Корректируем значение $b'_2 = b_2 - x_{12} = 49 - 8 = 41$.

В оставшуюся клетку (3,2) заносим число $x_{32} = 41$, после чего закрываются третья строка, и второй столбец.

Полученный план является невырожденным, так как число заполненных клеток 6 совпадает с числом $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Значение целевой функции при использовании полученного опорного плана равно

$$F = 23 \cdot 8 + 14 \cdot 26 + 12 \cdot 21 + 15 \cdot 14 + 25 \cdot 41 + 17 \cdot 17 = 2324.$$

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	23 8	14 26	20	34
A_2	12 21	21	25	15 14	35
A_3	15	25 41	21	17 17	58
Потребности	21	49	26	31	127

Замечание. При заполнении таблицы могут возникать ситуации, когда одновременно закрываются и строка, и столбец. В этом случае в свободную клетку записывают число 0 и считают такую клетку загруженной (чтобы отличать нулевую загрузку от свободной клетки иногда пишут 0*). Число 0* может быть записано только в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками (о понятии цикла будет сказано далее).

Проверим, является ли этот план оптимальным. Для этого составим систему уравнений вида $u_i + v_j = c_{ij}$ *для* $x_{ij} > 0$, используя значения тарифов c_{ij} в занятых клетках:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 23, \\ u_1 + v_3 = 14, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_4 = 15, \\ u_3 + v_2 = 25, \\ u_3 + v_4 = 17. \end{cases}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим, что $v_2 = 23$, $v_3 = 14$, $u_3 = 2$, $v_4 = 15$, $u_2 = 0$, $v_1 = 12$. Найденные значения потенциалов показаны в таблице (дополнительная строка сверху и столбец слева).

Таблица

v_j		12	23	14	15	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	18	23 8	14 26	20	34
0	A_2	12 21	21	25	15 14	35
2	A_3	15	25 41	21	17 17	58
		21	49	26	31	127

Вычислим оценки свободных клеток по формуле $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$s_{11} = 18 - (0 + 12) = 6$, $\quad s_{14} = 20 - (0 + 15) = 5$

$s_{22} = 21 - (0 + 23) = -2$, $\quad s_{23} = 25 - (0 + 14) = 11$,

$s_{31} = 15 - (2 + 12) = 1$, $\quad s_{33} = 21 - (2 + 14) = 5$.

Так как одна из оценок s_{ij} отрицательная, то построенный опорный план не является оптимальным.

Отметим, что при решении практических задач находить все оценки свободных клеток не обязательно, достаточно устно сравнить сумму потенциалов $u_i + v_j$ и тариф c_{ij}. Значение оценки вычисляется только в тех случаях, когда $u_i + v_j > c_{ij}$.

Отрицательная оценка получена для клетки (2,2).

Строим для этой клетки цикл. Кроме клетки (2,2) в этот цикл входят клетки (2,4), (3,4), (3,2). Расставляем знаки в клетках, включенных в цикл: клеткам (2,4) и (3,2) соответствует минус, клетке (3,4) – плюс.

Из клеток, помеченных знаком минус, выбираем ту, в которую загружено меньше число. В данном случае это число $Q = 14$, загруженное в клетку (2,4). Проведем перераспределения груза по циклу: в клетки (2,2) и (3,4) добавляем 14, значение 41, стоящее в клетке (3,2). Уменьшаем на 14, а клетку (2,4) далее считаем свободной. В результате получаем новый опорный план (таблица).

Таблица

v_j		14	23	14	15	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	18	23 8	14 26	20	34
–2	A_2	12 21	21 14	25	15	35
2	A_3	15	25 27	21	17 31	58
		21	49	26	31	127

Проверяем полученный опорный план на оптимальность. Для этого снова составляем систему уравнений вида $u_i + v_j = c_{ij}$ *для* $x_{ij} > 0$, используя значения тарифов c_{ij} в занятых клетках:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 23, \\ u_1 + v_3 = 14, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_2 = 21, \\ u_3 + v_2 = 25`, \\ u_3 + v_4 = 17. \end{cases}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим, что $v_2 = 23$, $v_3 = 14$, $u_3 = 2$, $v_4 = 15$, $u_2 = -2$, $v_1 = 14$. Новые значения потенциалов указаны в таблице 6.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$s_{11} = 18 - (0 + 14) = 4$, $\quad s_{14} = 20 - (0 + 15) = 5$,

$s_{23} = 25 - (-2 + 14) = 13$ $\quad s_{24} = 15 - (-2 + 15) = 2$,

$s_{31} = 15 - (2 + 14) = -1$, $\quad s_{33} = 21 - (2 + 15) = 4$.

Как видно, полученный опорный план снова не является оптимальным, так как одна из оценок свободных клеток является отрицательной.

Значение целевой функции при использовании полученного опорного плана равно

$F = 23 \cdot 8 + 14 \cdot 26 + 12 \cdot 21 + 21 \cdot 14 + 25 \cdot 27 + 17 \cdot 31 = 2296$.

Так как отрицательная оценка получена для клетки (3,1), то строим для этой клетки цикл. В цикл входят клетки (3,1), (3,2), (2,2) и (2,1). Клеткам (3,2) и (2,1) ставим в соответствие минус, клеткам (3,1) и (2,2) – плюс.

Из клеток, помеченных знаком минус, выбираем ту, в которую загружено меньше число. В данном случае это число Q=21, загруженное в клетку (2,1). Проведем перераспределения груза по циклу: в клетки (3,1) и (2,2) добавляем 21, в клетке (3,2). вычитаем 21, а клетку (2,1) далее считаем свободной. В результате получаем новый опорный план (таблица).

Таблица

v_j		13	23	14	15	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	18	23 8	14 26	20	34
–2	A_2	12	21 35	25	15	35
2	A_3	15 21	25 6	21	17 31	58
		21	49	26	31	127

Проверяем полученный опорный план на оптимальность. Составляем систему уравнений вида $u_i + v_j = c_{ij}$ *для* $x_{ij} > 0$:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 23, \\ u_1 + v_3 = 14, \\ u_2 + v_2 = 21, \\ u_3 + v_1 = 15, \\ u_3 + v_2 = 25`, \\ u_3 + v_4 = 17. \end{cases}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим, что $v_2 = 23$, $v_3 = 14$, $u_3 = 2$, $v_4 = 15$, $u_2 = -2$, $v_1 = 13$. Новые значения потенциалов указаны в таблице 7.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$s_{11} = 18 - (0 + 13) = 5$, $\quad s_{14} = 20 - (0 + 15) = 5$,

$s_{21} = 12 - (-2 + 13) = 1$, $\quad s_{23} = 25 - (-2 + 14) = 13$,

$s_{24} = 15 - (-2 + 15) = 2$, $\quad s_{33} = 21 - (2 + 15) = 4$.

Так как все оценки свободных клеток являются неотрицательными, то полученный план является оптимальным.

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 26 & 0 \\ 21 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 31 \end{bmatrix}$$

Значение целевой функции при использовании полученного оптимального плана равно

$F = 23 \cdot 8 + 14 \cdot 26 + 21 \cdot 35 + 15 \cdot 21 + 25 \cdot 6 + 17 \cdot 31 = 2275$.

Экономические приложения транспортной задачи не исчерпываются решением задач, связанных с перевозкой грузов. Модель транспортной задачи применима также при решении задач оптимизации размещения объектов производства, составлении модели топливно-энергетического баланса, составлении планов распределения сельскохозяйственных культур по участкам различного плодородия и др.

Упражнения

В задачах 1 – 5 требуется: а) построить опорный план «методом потенциалов»; д) определить соответствующие значения целевых функций.

1.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		60	70	50
A1	90	7	4	9
A2	80	8	5	3
A3	50	4	6	5

2.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		40	90	30
A1	60	1	3	4
A2	50	2	5	1
A3	70	4	5	3

3.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		100	50	80
A1	120	4	8	10
A2	60	5	3	9
A3	90	6	7	4

4.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		60	90	80
A1	80	6	7	8
A2	100	9	10	4
A3	70	3	5	9

5.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		90	80	50
A1	100	4	3	4
A2	70	3	2	5
A3	80	5	4	4

6. Три молочных фермы с суточным производством 40, 25 и 35 тыс. л. молока снабжают четыре молокозавода, спрос у которых 15, 40, 30 и 15 тыс. л. молока в сутки. Молоко доставляется на заводы молоковозами, одинаковыми по вместимости. Стоимость провоза молока молоковозом на расстояние 1 км составляет 3 ден. ед. Расстояние от ферм до молокозаводов следующее:

Таблица

Молочные фермы	Молокозаводы			
	1	2	3	4
I	10	5	7	4
II	7	4	9	10
III	6	14	8	7

Найти оптимальный план поставки молока с ферм на молокозаводы с минимальными транспортными издержками. Рассчитайте стоимость доставки молока от каждой фермы до молокозавода.

7. Имеется три участка пашни, на которых могут быть засеяны кукуруза, пшеница, ячмень и просо. Площадь каждого из участков равна соответственно 600, 180 и 220 га. Кукурузой, пшеницей, ячменем и просом следует засеять 290, 180, 110 и 420 га соответственно. Урожайность для каждого из участков различна и задается матрицей.

$$\begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 & 48 \\ 30 & 28 & 22 & 25 \\ 18 & 22 & 14 & 19 \end{pmatrix}.$$

Определить, сколько гектаров каждой культуры на каждом из участков следует засеять, чтобы общий сбор зерна был максимальным.

8. Четыре растворных узла поставляют раствор четырем строительным фирмам. Для перевозки раствора используются однотипные автомашины. Объем производства растворных узлов в день равен 30, 20, 40 50т. Потребности строительных фирм в день: 35, 20 55, 30т. Расстояние в километрах от растворных узлов до строительных объектов указано в таблице.

Растворный узел	Строительные фирмы			
	1	**2**	**3**	**4**
I	2	4	1	3
II	5	6	3	4
III	3	6	7	5
IV	1	2	9	3

Определите, в каком объеме, с каких растворных узлов и куда должен доставляться раствор, чтобы транспортные издержки по его доставке автотранспортом были минимальными.

4. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Постановка общей задачи целочисленного программирования

Задача математического программирования, переменные которой принимают только целочисленные значения, называется задачей целочисленного программирования (ЗЦП).

В математической модели ЗЦП как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Рассмотрим случай, когда целевая функция и система ограничений задачи являются линейными. Тогда математическая постановка ЗЦП формулируется следующим образом:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \rightarrow \ \max\ (\min), \qquad (63)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \qquad (64)$$

$$d_j \le x_j \le D_j, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (65)$$

где $x_j = 0,1,2,...$ – целые ($j = \overline{1,n_1},\ n_1 \le n$), $d_j \ge 0$. Если $n_1 = n$, то задачу называют полностью целочисленной; если $n_1 < n$, то частично-целочисленной.

2. Способы решения задач целочисленного программирования

Существуют различные способы решения ЗЦП.

1 способ. Решить ЗЦП как непрерывную ЗЛП; округлить полученные значения переменных; проверить приемлемость округленного решения. Если решение приемлемо, то оно принимается как решение ЗЦП.

2 способ. Если необходимо найти точное решение ЗЦП, а множество решений ЗЦП невелико, то может быть применен полный перебор возможных значений целочисленных переменных с последующим выбором наилучшего с точки зрения целевой функции. При большом количестве переменных и значительной области допустимых значений метод неприменим из-за своей трудоемкости.

3 способ. Для нахождения точного решения ЗЦП в общем случае применяют специальные методы, такие как метод Гомори, метод ветвей и границ и др.

5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Постановка общей задачи параметрического программирования

Задача параметрического программирования имеет следующий вид:

$$L = \sum_{j=1}^{n} (c'_j + c''_j t) x_j \rightarrow \max \text{ (min)}, \tag{66}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{67}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{68}$$

где c'_j, c''_j, a_{ij}, b_i – заданные постоянные числа.

Может быть поставлена и обобщенная параметрическая задача, в которой от параметра t линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции (цены изделий от спроса на них), в системе уравнений (нормы расхода ресурсов от применяемых технологий), свободные члены системы уравнений (наличие ресурсов от предложений поставщиков):

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} (c'_j + c''_j t) x_j \rightarrow \max \text{ (min)}, \tag{69}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a'_{ij} + a''_{ij}) x_j = b'_i + b''_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{70}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{71}$$

$$\alpha \le t \le \beta, . \tag{72}$$

где α, β – промежуток изменения значений параметра t.

Решение задач (66)-(68), (69)-(72) можно найти методами линейного программирования.

Предположим, что в задаче (66)-(68) множество неотрицательных решений системы линейных уравнений (67) (многогранник решений) не пустое и включает более чем одну точку. Тогда исходная задача состоит в определении при каждом параметре $t \in [\alpha, \beta]$ такой точки многогранника решений, в которой функция (66) принимает максимальное значение. Чтобы найти эту точку, будем считать, что $t = t_0$ и найдем решение полученной ЗЛП (66)-(68), т. е. определим вершину многогранника решений, в которой функция (66) имеет максимум, либо устанавливаем, что при данном значении t_0 задача неразрешима.

После нахождения точки, в которой при $t = t_0$ функция (66) принимает максимальное значение, ищут множество значений t, для которых координаты этой точки определяют оптимальный план задачи (66)-(68). Найденные параметры t исключают из рассмотрения и берут некоторое новое значение t из промежутка $[\alpha, \beta]$.

Для выбранного значения параметра t из промежутка $[\alpha, \beta]$ либо находят оптимальный план, либо устанавливают неразрешимость задачи.

6. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Постановка общей задачи дробно-линейного программирования

Общая задача дробно-линейного программирования формулируется в следующем виде:

$$L = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{L_1}{L_2} \rightarrow \max, \tag{73}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{74}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, . \tag{75}$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} – некоторые постоянные числа, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$.

При $n = 2$:

$$L = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \rightarrow \max, \tag{76}$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{77}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, . \tag{78}$$

где $d_1 x_1 + d_2 x_2 > 0$.

2. Алгоритм решения ЗДЛП при $n = 2$.

1. Построить область (многоугольник) допустимых решений Для этого:
   - в неравенствах (77) и (78) заменить знаки неравенств на знаки равенств;
   - построить прямые, определяемые этими равенствами;
   - найти полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи;
   - найти область (многоугольник) допустимых решений задачи.
2. Построить прямую уровня. Для этого:
   - положить значение целевой функции равным некоторому постоянному числу L_0;
   - построить прямую $L_0 = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2}$.
3. Определить точку максимума или установить неразрешимость задачи.
4. Найти значение целевой функции в точке максимума.

3. Алгоритм решения ЗДЛП при $n > 2$.

Решение задачи дробно-линейного программирования при $n > 2$ может быть сведено к решению задачи линейного программирования.

1. Обозначить $y_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \right)^{-1}$.

2. Ввести новые переменные $y_j = y_0 x_j$, ($j = \overline{1,n}$).

При этом исходная задача ЗДЛП сводится к следующей ЗЛП:

$$L^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \to \max, \tag{79}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{80}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, \tag{81}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad y_0 \geq 0. \tag{82}$$

3. Решить полученную ЗЛП средствами линейного программирования.

II. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ФОРМЫ ЗАПИСИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Постановка задачи линейного программирования

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и методы решения задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Математическая модель экономической задачи – это совокупность математических соотношений (функций, уравнений, неравенств и т.д.), описывающих рассматриваемый экономический процесс. В математическую модель экономической задачи включают: 1) неизвестные переменные величины задачи; 2) систему ограничений; 3) целевую функцию.

Переменными задачи называют совокупность неизвестных переменных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти переменные называют планом (решением) задачи и обычно записывают в виде вектора

$$X = (x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (1)$$

Системой ограничений называют совокупность уравнений и неравенств, налагаемых на неизвестные переменные величины:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le (\ge, =) 0. \qquad (2)$$

Условия (2) являются следствием ограниченности ресурсов, необходимости удовлетворения ряда условий технологических или производственных процессов и т.д.

Целевой функцией называют функцию $F = F(X)$, посредством которой осуществляется выбор наилучшего решения (наилучшего плана) из множества возможных:

$$F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \ (\min) \qquad (3)$$

Выбирая те или другие значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, можно изменять значения целевой функции.

Наилучший план доставляет целевой функции наибольшее или наименьшее значение.

Совокупность переменных задачи, удовлетворяющих системе ограничений (2), называют областью допустимых решений и обозначают буквой Ω ($X \in \Omega$).

Таким образом, задачей математического программирования является следующая задача: найти план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, доставляющий экстремальное значение целевой функции $F(X)$ при ограничениях вида (2). В ряде случаев на план задачи или некоторые его компоненты (координаты) из экономических

или физических соображений налагают условия неотрицательности или целочисленности.

План (решение) X, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется допустимым ($X \in \Omega$). Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется оптимальным. Оптимальный план (решение) обозначают X^*, $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, экстремальное значение целевой функции обозначают $F(X^*)$. Оптимальное решение, вообще говоря, не обязательно единственно, возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесконечное число оптимальных решений.

Линейное программирование – раздел математического программирования, изучающий методы решения оптимизационных задач, в которых целевая функция и функции системы ограничений являются линейными относительно переменных задачи.

Общей задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача нахождения значений переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, доставляющих экстремальное (максимальное или минимальное) значение линейной целевой функции F

$$F(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max\ (\min) \qquad (4)$$

и удовлетворяющих системе линейных ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{k,n}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины.

Модели и методы линейного программирования применяются при решении разнообразных экономических задач: задач использования и экономии ресурсов (задач планирования производства), задач о составлении рациона (задач о диете, задач о смесях), задач об использовании мощностей (задач о загрузке оборудования), транспортной задачи и т.д.

Пример 1. Предприятие производит изделия двух видов: $П_1$ и $П_2$. При этом используется три вида сырья: S_1, S_2 и S_3. Запасы каждого вида сырья ограничены. Количество сырья, используемого для изготовления одного изделия каждого вида, объем запасов каждого вида сырья и величина прибыли от реализации одного изделия каждого вида приведены в табл. 1. Составить математическую модель этой задачи.

Таблица 1

Вид сырья	Изделия		Запасы сырья
	$П_1$	$П_2$	
S_1	1	2	470
S_2	5	4	1600
S_3	7	2	2060
Прибыль от реализации одного изделия	9	7	

Пусть x_1 – количество изготовленных изделий первого вида, x_2 – второго вида. Прибыль от реализации всей продукции составляет $F(X) = 9x_1 + 7x_2$ и ее нужно максимизировать:

$$F(X) = 9x_1 + 7x_2 \to \max . \qquad (7)$$

Ограничения на затраты ресурсов представимы в виде следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 470, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 1600, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 2060, \end{cases} \qquad (8)$$

Кроме того, по смыслу задачи должны выполняться неравенства

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (9)$$

Пример 2. При изготовлении трех видов изделий A, B и C используется токарное, фрезерное. сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования, общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия каждого вида приведены в следующей таблице.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на обработку одного изделия			Общий фонд рабочего времени оборудования (ч)
	A	*B*	*C*	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной. Составить математическую модель задачи.

Решение. Пусть будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц вида B и x_3 вида C. Тогда потребуется для производства такого количества изделий $2x_1+4x_2+5x_3$ станко-часов фрезерного оборудования.

Общий фонд рабочего времени станков данного типа не может превышать 120, поэтому должно выполняться неравенство $2x_1+4x_2+5x_3 \le 120$.

Рассуждая аналогично относительно возможного использования токарного, сварочного и шлифовального оборудования, придем к следующим неравенствам:

$$x_1+8x_2+6x_3 \le 280,$$
$$7x_1+4x_2+5x_3 \le 240,$$
$$4x_1+6x_2+7x_3 \le 360.$$

При этом количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

Если будет изготовлено x_1 единиц изделий вида A, x_2 единиц вида B и x_3 вида C, то прибыль от реализации составит $f=10x_1+14x_2+12x_3$.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$f=10x_1+14x_2+12x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+4x_2+5x_3 \le 120, \\ x_1+8x_2+6x_3 \le 280, \\ 7x_1+4x_2+5x_3 \le 240, \\ 4x_1+6x_2+7x_3 \le 360, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

2. Основные виды записи задачи линейного программирования

Наряду с основной ЗЛП широко используются еще два вида записи ЗЛП: симметрическая и каноническая.

Симметричной (или стандартной, нормальной) задачей линейного программирования называется следующая задача:

$$F(X)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \max, \qquad (10)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (11)$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}, \qquad (12)$$

т.е. задача, в которой $F(X) \to \max$, все переменные неотрицательны, и ограничения заданы неравенствами со знаком $\le$.(Или задача в которой $F(X) \to \min$, все переменные неотрицательны, и ограничения заданы неравенствами со знаком $\ge$.) В рассмотренном выше примере 1 математическая модель задачи была записана в симметричной форме.

Канонической (или основной) задачей линейного программирования называется следующая задача:

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ (\min), \tag{13}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{14}$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,n}, \tag{15}$$

т.е. задача, в которой все переменные неотрицательны, а ограничения заданы уравнениями.

Любую из указанных выше трех форм записи ЗЛП можно преобразовать в другую, а требование максимизации целевой функции можно заменить требованием минимизации новой целевой функции $F'(X) = -F(X)$.

Для записи ЗЛП могут использоваться различные способы обозначений. Так, например, целевую функцию (4) можно записать с помощью знака суммирования

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \tag{16}$$

или с помощью скалярного произведения

$$F(X) = C \cdot X \to \max(\min), \tag{17}$$

где C и X – векторы: коэффициентов $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ и переменных $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Систему ограничений (11) можно кратко переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\ ,\ i = \overline{1,m}\ , \tag{18}$$

а систему ограничений (14) – в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ ,\ i = \overline{1,m}\ . \tag{19}$$

Пример 3. Привести к канонической форме следующую ЗЛП:

$$f = 6x_1 + 8x_2 \to \min;$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 10x_2 \geq 50, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 12x_1 + 3x_2 \geq 34, \\ 16x_1 + 14x_2 \leq 160, \\ 18x_1 + 15x_2 \leq 200, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ .$$

Решение. Заменяем функцию f на $f' = -f$. Из левых частей ограничений типа $\geq$ вычитаем неотрицательные переменные x_3, x_4 и x_5, а к левым частям ограничений типа $\leq$ прибавляем неотрицательные переменные x_6 и x_7.

Получим модель задачи в канонической форме:

$$f' = -6x_1 - 8x_2 \to \max;$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 10x_2 - x_3 = 50, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 10, \\ 12x_1 + 3x_2 - x_5 = 34, \\ 16x_1 + 14x_2 + x_6 = 160, \\ 18x_1 + 15x_2 + x_7 = 200, \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,7}.$$

Пример 4. Привести к канонической форме следующую ЗЛП:

$$f = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \min;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 \geq 9, \\ 5x_1 + 4x_3 \leq 12, \\ 2x_2 + 6x_3 = 4, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Решение. Заменяем функцию f на $f' = -f$. Поскольку на переменную x_2 не наложено условие неотрицательности, то ее заменим разностью двух неотрицательных переменных x_2' и x_2'' ($x_2 = x_2' - x_2''$) и подставим полученное выражение вместо переменной x_2 в модель задачи.

Из левой части ограничения $2x_1 + 4x_2 - 7x_3 \geq 9$ вычитаем неотрицательную переменную x_4, а к левой части ограничения $5x_1 + 4x_3 \leq 12$ прибавляем неотрицательную переменную x_5.

Получим модель задачи в канонической форме:

$$f' = -5x_1 - 6x_2' + 6x_2'' - 4x_3 \to \max;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2' - 4x_2' - 7x_3 - x_4 = 9, \\ 5x_1 + 4x_3 + x_5 = 12, \\ 2x_2' - 2x_2'' + 6x_3 = 4, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Упражнения

1. Собственный капитал банка составляет 120 млн ден. ед. Не менее 40 млн ден. ед. этих средств должны быть размещены в кредитах, доходность которых составляет 12 %. Кредиты являются неликвидными активами банка. Другое дело государственные ценные бумаги: их можно в любой момент продать, получив прибыль. Поэтому существует правило, согласно которому ценные бумаги должны составлять не менее 20 % того количества капитала банка, который будет размещен в кредитах и ценных бумагах. Доходность ценных бумаг составляет 8 %.

Составить математическую модель задачи, позволяющую сформировать оптимальный пакет активов банка, т.е. установить, какие объемы средств банка следует разместить в кредитах и в ценных бумагах, чтобы получить максимальную прибыль.

2. Для изготовления 1 единицы продукции A используется 2 т сырья α и 1 т сырья β. Для изготовления 1 единицы продукции B используется 1 т сырья

α и 5 т сырья β. Цех располагает ресурсами сырья α в количестве 2400 и сырья β в количестве 3000 т. Прибыль от реализации 1 единицы продукции A составляет 6000 денежных единиц и от реализации 1 единицы продукции B – 1200- денежных единиц.

Составить математическую модель задачи, позволяющей определить оптимальный план выпуска продукции A, B, при котором прибыль будет максимальной.

3. Для изготовления изделия A нужно затратить 20 часов работы токарного станка и 30 часов работы фрезерного станка. Для изготовления изделия B нужно затратить 10 часов работы токарного станка и 40 часов работы фрезерного станка. Ресурсы времени работы токарных станков равны 2000 станкочасов. Ресурсы времени фрезерных станков равны 4800 станкочасов. Прибыль от реализации 1 единицы изделия A или изделия B 400 денежных единиц.

Построить математическую модель задачи, позволяющей найти оптимальный план выпуска изделий A и B, максимизирующий прибыль.

4. При подкормке посева необходимо внести в расчете на один гектар почвы не менее 25 ед. вещества B_1, не менее 30 ед. вещества B_2 и не менее 60 ед. вещества B_3. Есть возможность приобрести удобрения Y_1 и Y_2. Цена единицы веса удобрения Y_1 равна 4 ден. ед., а цена единицы веса удобрения Y_2 равна 8 ден. ед.

Дана матрица $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\\ 3 & 12\end{pmatrix}$, в которой элемент на пересечении строки i и столбца k равен количеству вещества B_i, содержащемуся в единице удобрения Y_k.

Составить математическую модель задачи, по которой можно будет найти план закупки удобрений, обеспечивающий подкормку посева с соблюдением указанных норм и гарантирующий минимальные денежные затраты.

5. С поля на овощную базу перевозятся овощи автомашинами грузоподъемностью по 5 и 10 тонн. За 1 ч база может принять не более 10 машин, при этом не более 8 машин по 5 тонн и не более 6 машин по 10 тонн.

Составить математическую модель задачи, по которой можно определить сколько машин по 5 и 10 тонн нужно отправлять с поля на базу за 1 ч, чтобы перевезти наибольшее количество овощей.

6. С железнодорожных станций A и B нужно развести грузы на склады № 1, № 2 и № 3. На станции A весь груз можно погрузить на 80 машин, а на станции B – на 100 машин. Склады должны принять: № 1 – 50 машин, № 2 – 70 машин, № 3 – 60 машин. Количество бензина в литрах, которое расходует одна машина на пробег от станции до склада, задается следующей таблицей:

Станции	Склады		
	№ 1	№ 2	№ 3
A	2	4	5
B	4	5	3

Построить математическую модель задачи, позволяющей составить план перевозок, при котором расход бензина будет наименьшим.

7. На станках A и B разной производительности обрабатываются детали № 1, № 2 и № 3. Всего нужно обработать деталей № 1 – 100 штук, № 2 – 140 штук и № 3 – 110 штук. На станке A можно обработать 160 деталей, а на станке B – 190 деталей. Стоимость электроэнергии (в рублях), затрачиваемой одним станком на обработку одной детали, дается следующей таблицей:

Станки	Детали		
	№ 1	№ 2	№ 3
A	4	8	12
B	8	10	6

Построить математическую модель задачи, позволяющей составить такой план работы, при котором затраты электроэнергии будут наименьшими.

8. Для изготовления единицы сплава № 1 требуется металла A – 2 единицы, металла B – 3 единицы и металла C – 4 единицы. Для изготовления единицы сплава № 2 требуется соответственно 2, 5 и 2 единицы металлов A, B, C. Всего имеется металлов A, B и C соответственно 24, 50 и 40 единиц. Масса единицы № 1 равна 3 кг, а единицы сплава № 2 – 4 кг.

Построить математическую модель задачи, на основании которой можно найти сколько единиц сплава № 1 и сплава необходимо изготовить, чтобы их общая масса была наибольшей.

9. Для изготовления трех видов изделий P_1, P_2 и P_3 используют четыре вида материалов: S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы материалов, технологические нормы расходов материалов на каждое изделие и цена единицы изделий приведены в следующей таблице:

Вид материалов	Запас материалов, кг	Норма расхода материалов на одно изделие, кг		
		P_1	P_2	P_3
S_1	150 000	4	2	1
S_2	170 000	6	0	2
S_3	100 000	0	2	4
S_4	200 000	8	7	0
Цена одного изделия, руб.		100	150	200

Построить математическую модель задачи, на основании которой можно найти план выпуска изделий, обеспечивающий их максимальный выпуск по стоимости.

10. Сельскохозяйственное предприятие отвело три земельных массива площадью в 5000, 8000 и 9000 га под посевы ржи, пшеницы и кукурузы. Средняя урожайность по массивам указана в следующей таблице:

Культура	Средняя урожайность (ц/га) массива		
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	15	22
Кукуруза	30	35	25

За 1 ц ржи предприятие получает 2 ден. ед. прибыли, за 1 ц пшеницы – 2,5 ден. ед., за 1 ц кукурузы – 1,4 ден. ед.

Составить математическую модель задачи, позволяющей определить сколько гектаров и на каких массивах следует отвести под каждую культуру, чтобы получить максимальную прибыль, если по плану необходимо сдать не менее 1 900 т ржи, 15 800 т пшеницы и 30 000 т кукурузы.

В задачах 11 – 14 представить ЗЛП в канонической форме.

11.

$$f = 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 \to \max;$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 2, \\ x_2 - 5x_3 = -5, \end{array}\right\}$$

$$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

12.

$$f = -2x_1 - x_2 + x_3 \to \max;$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_2 - 5x_3 \leq 4, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

13.

$$f = 7x_1 - 6x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 3, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 4, \\ 3x_2 - 4x_3 = -2, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

14.

$$f = 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 \to \min;$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ 2x_1 - 5x_3 = -5, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 12, \end{array}\right\}$$

$$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

15. Привести к канонической форме записи следующую задачу линейного программирования:

а) $f = 2x_1 + x_2$ (max)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ -2x_1 + 3x_2 \le 16; \\ 4x_1 + x_2 \le 12; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

б) $f = x_1 - 3x_2 + 2x_3$ (min)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 \le 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0.$$

16. Привести к симметричной форме записи задачу линейного программирования.

$$f = 7x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 9(\max)$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9; \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 12; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, (j = 1,\ldots,5)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ (ГРАФИЧЕСКИМ) МЕТОДОМ

Рассмотрим наиболее наглядный метод решения ЗЛП – геометрический. Геометрический метод решения ЗЛП удобен для решения задач, содержащих две переменные (x_1 и x_2). Целевая функция в этом случае имеет вид

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min). \quad (20)$$

Алгоритм решения ЗЛП геометрическим (графическим) методом:

1. Построить область допустимых решений. Для этого:
   - заменить в системе ограничений знаки неравенств на знаки равенств;
   - на плоскости x_1Ox_2 построить прямые, соответствующие этим равенствам (такие прямые определяют границы области допустимых решений);
   - определить полуплоскости, соответствующие исходным неравенствам системы ограничений;
   - найти пересечение всех таких полуплоскостей (построенный многоугольник и является областью допустимых решений Ω).
2. Графически отыскать оптимальный план. Для этого необходимо:
   - на плоскости x_1Ox_2 отложить вектор-градиент $C = (c_1, c_2)$, где c_1, c_2 – коэффициенты целевой функции (20) (вектор-градиент C указывает направление наискорейшего возрастания целевой функции);
   - построить прямую, перпендикулярную вектору-градиенту $C = (c_1, c_2)$; для определенности можно выбрать прямую, проходящую через точку (0; 0); такая прямая задается уравнением

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0; \quad (21)$$

(прямые, заданные уравнениями $c_1x_1 + c_2x_2 = F_0$, называются линиями уровня целевой функции, вдоль вдоль этих линий целевая функция принимает постоянные значения).

- перемещать линию уровня параллельно себе в направлении вектора-градиента C (при решении задач на максимум) или в противоположном направлении (при решении задач на минимум) до того момента, когда она пройдет либо через крайнюю точку (x_1^*, x_2^*) области Ω, либо через крайнее ребро этой области; такое положение линии уровня называется разрешающим положением.

3. Найти оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ и вычислить экстремальное значение целевой функции $F^* = F(X^*)$. Для этого:

- графически определить пересечением каких прямых является крайняя точка (x_1^*, x_2^*);
- найти координаты крайней точки (x_1^*, x_2^*), решив систему, состоящую из уравнений двух прямых, пересекающихся в этой точке;
- найденные координаты подставить в целевую функцию и найти значение целевой функции.

Замечание. Если установить крайнюю точку области допустимых решений только графическими средствами сложно, то можно вычислить значение целевой функции в нескольких угловых точках, после чего сравнить их между собой и выбрать оптимальное.

Область допустимых решений ЗЛП является выпуклой. Это означает, что для любых двух ее точек соединяющий их отрезок целиком содержится в области.

При построении области допустимых решений возможно несколько различных случаев.

1. Область допустимых решений является пустым множеством (рис. 1).

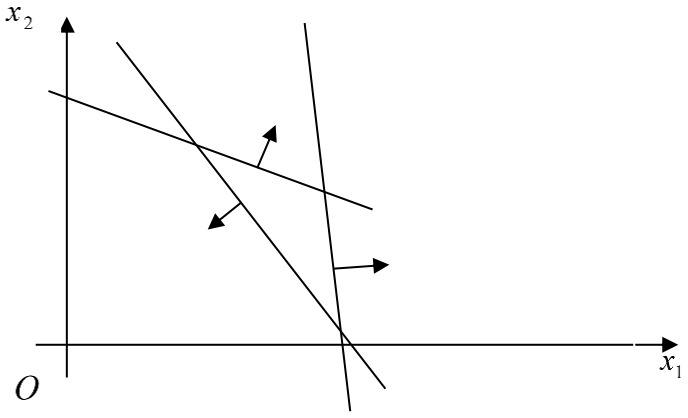


Рис. 1

В этом случае ЗЛП решений не имеет. С экономической точки зрения этот случай соответствует ситуации, когда система экономических требований несовместны. Для нахождения решения задачи ограничения должны быть ослаблены.

2. Областью допустимых решений является единственная точка (рис. 2).

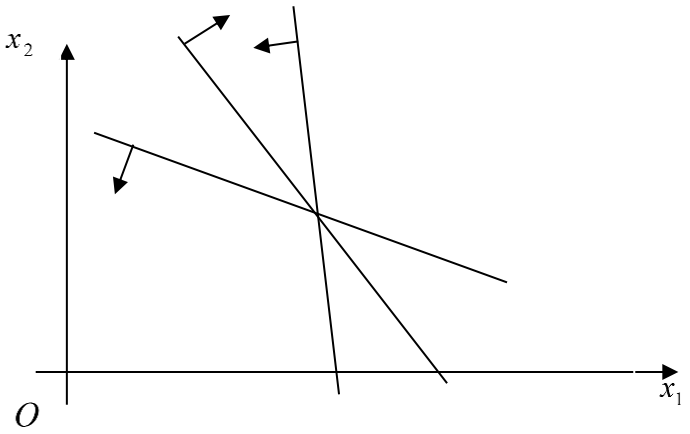


Рис. 2

В этом случае ЗЛП имеет единственный план (не зависящий от целевой функции), который и является оптимальным. Компоненты оптимального плана определяются как координаты точки пересечения границ полуплоскостей.

3. Область допустимых решений является многоугольником (рис. 3).

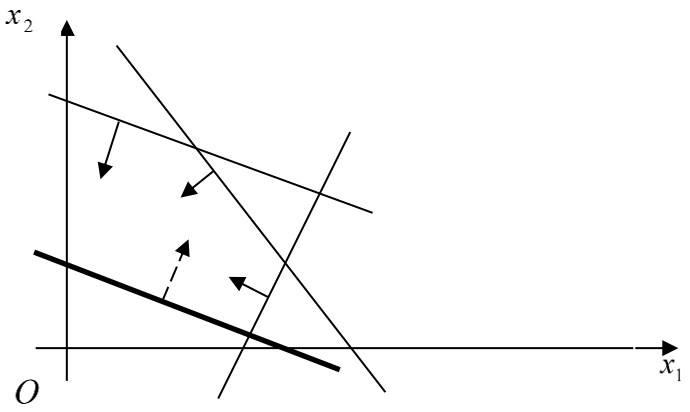


Рис. 3

В этом случае решение ЗЛП существует и совпадает с одной из вершин (или с одним из ребер) этого многоугольника.

4. Область допустимых решений является неограниченной фигурой. В этом случае возможны различные ситуации. Решение задачи может существовать (рис. 4), а может и не существовать (рис. 5).

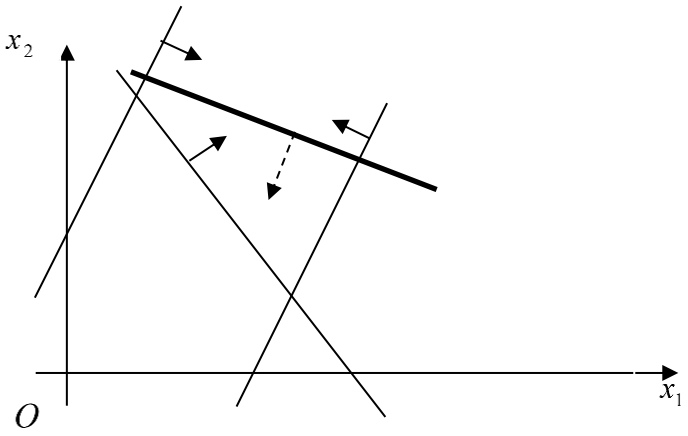


Рис. 4

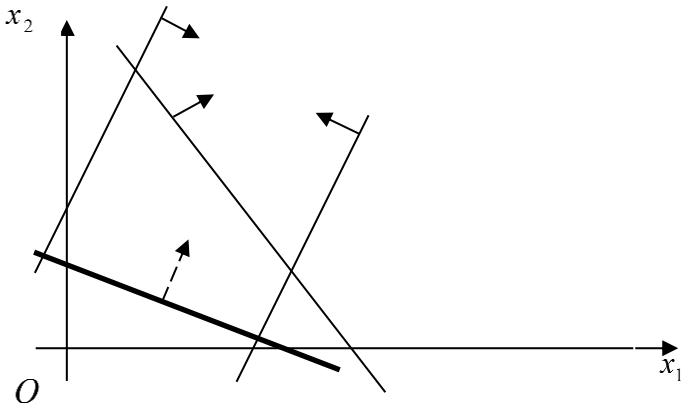


Рис. 5

С экономической точки зрения эта ситуация означает, как правило, что в модели задачи не учтено какое-то условие, ограничивающее возможность изменения значения целевой функции.

Пример 2. С помощью графического метода определить сколько нужно произвести изделий каждого вида согласно условию задачи из примера 1, чтобы предприятие получило максимальную прибыль.

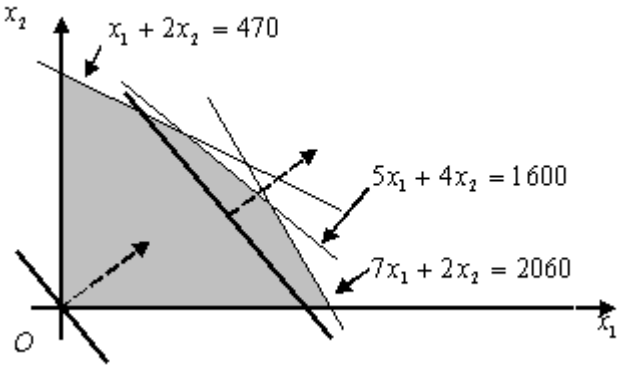


Рис. 6

Решение. Построим область допустимых решений, соответствующую ограничениям (8)-(9).

Заменяем в системе ограничений знаки неравенств на знаки равенств и строим прямые

$x_1 + 2x_2 = 470$, $5x_1 + 4x_2 = 1600$, $7x_1 + 2x_2 = 2060$.

Эти прямые схематично изображены на рис. 6.

Чтобы определить полуплоскость, соответствующую исходному неравенству системы ограничений, возьмем произвольную точку, не лежащую на граничной прямой, и проверим, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству.

Возьмем, например, точку (1, 1). Координаты этой точки удовлетворяют и первому, и второму, и третьему неравенству системы (8). Действительно,

$1 + 2\cdot 1 \le 470$, $5\cdot 1 + 4\cdot 1 \le 1600$, $7\cdot 1 + 2\cdot 1 \le 2060$.

Следовательно, все три неравенства выполняются в полуплоскостях, содержащих точку (1, 1).

С учетом неравенств (9) находим, что областью допустимых решений задачи является многоугольник, заштрихованный на рисунке 6.

В точке $O(0, 0)$ строим вектор-градиент $C = (9, 7)$. Перпендикулярно вектору-градиенту C проводим линию уровня $F = 0$, проходящую через начало координат. Параллельным перемещением прямой $F = 0$ вдоль вектора-градиента C находим крайнюю точку области решений, в которой целевая функция достигает максимума.

В данной задаче по чертежу может быть не вполне ясно, какая из точек является крайней точкой области. В таком случае следует решить системы, включающие уравнения прямых, точки пересечений которых являются потенциально крайними, вычислить значения целевой функции в этих точках и сравнить результаты.

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 470, \\ 5x_1 + 4x_2 = 1600 \end{cases}$$

и находим координаты точки пересечения этих прямых: $x_1 = 220$, $x_2 = 125$. Значение целевой функции в этой точке равно $F = 9\cdot 220 + 7\cdot 125 = 2855$.

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 1600, \\ 7x_1 + 2x_2 = 2060 \end{cases}$$

и находим координаты точки пересечения этих прямых: $x_1 = 280$, $x_2 = 50$. Значение целевой функции в этой точке равно $F = 9\cdot 280 + 7\cdot 50 = 2870$.

Так как во втором случае получено большее значение целевой функции, то оптимальным является план $X^* = (x_1^*; x_2^*) = (280;50)$ и $F\max = 2870$.

Для канонической ЗЛП может быть рассмотрена вторая геометрическая интерпретация. В этом случае столбцы матрицы системы ограничений $A = (a_{ij})$ рассматривают как векторы пространства R^m. Тогда каждому допустимому плану канонической ЗЛП — n-мерному вектору x — соответствует неотрицательная линейная комбинация столбцов матрицы A, равная столбцу $b \in R^m$.

Пример 2. Для изготовления изделия A нужно затратить 20 часов работы токарного станка и 30 часов работы фрезерного станка. Для изготовления изделия B нужно затратить 10 часов работы токарного станка и 40 часов работы фрезерного станка.

Ресурсы времени работы токарных станков равны 2000 станкочасов, а ресурсы времени фрезерных станков равны 4800 станкочасов. Прибыль от реализации 1 единицы изделия A или изделия B 400 составляет денежных единиц.

Составить оптимальный план выпуска изделий A и B из условия максимума прибыли.

Решение. Пусть x – количество изделий A, y – количество изделий B ($x \geq 0; y \geq 0$). Для их изготовления нужно затратить $20x+10y$ часов работы токарного станка и $30x+40y$ часов работы фрезерного станка.

Учитывая ресурсы станкочасов, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 20x+10y \leq 2000, \\ 30x+40y \leq 4800, \\ x \geq 0,\ y \geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y \leq 200, \\ 3x+4y \leq 480, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

Решением этой системы неравенств будет область D, лежащая в I координатной четверти ниже прямых $2x+y=200$ и $3x+4y=480$. Она изображена на рисунке 7.

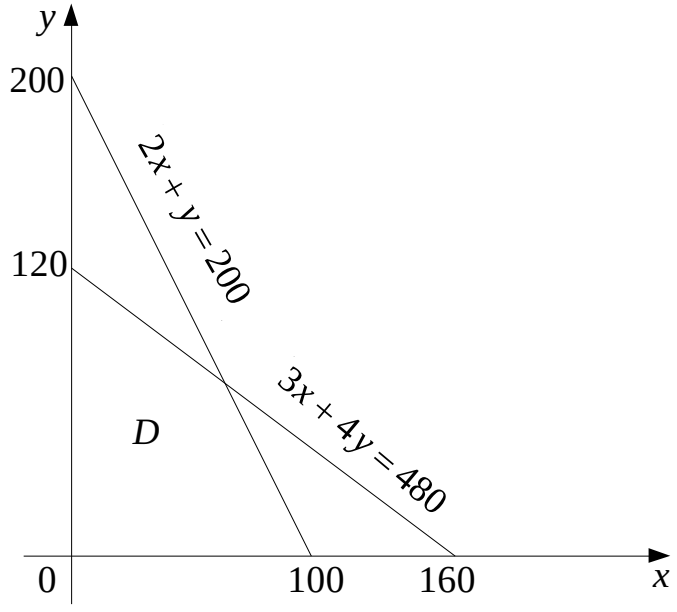


Рис. 7

Целевая функция будет иметь вид: $f=400x+400y \to \max$.

Строим вектор $\vec{n}_1 = 0,1\vec{n}$. Проводим линию уровня $f=0$, которая перпендикулярна вектору $\vec{n}_1$. Линию уровня $f=0$ перемещаем по направлению вектора $\vec{n}_1$.

Точкой выхода линии уровня из области допустимых решений является точка пересечения прямых $2x+y=200$ и $3x+4y=480$.

На рисунке 8 эта линия максимального уровня изображена пунктирной линией, она лежит выше всей области D.

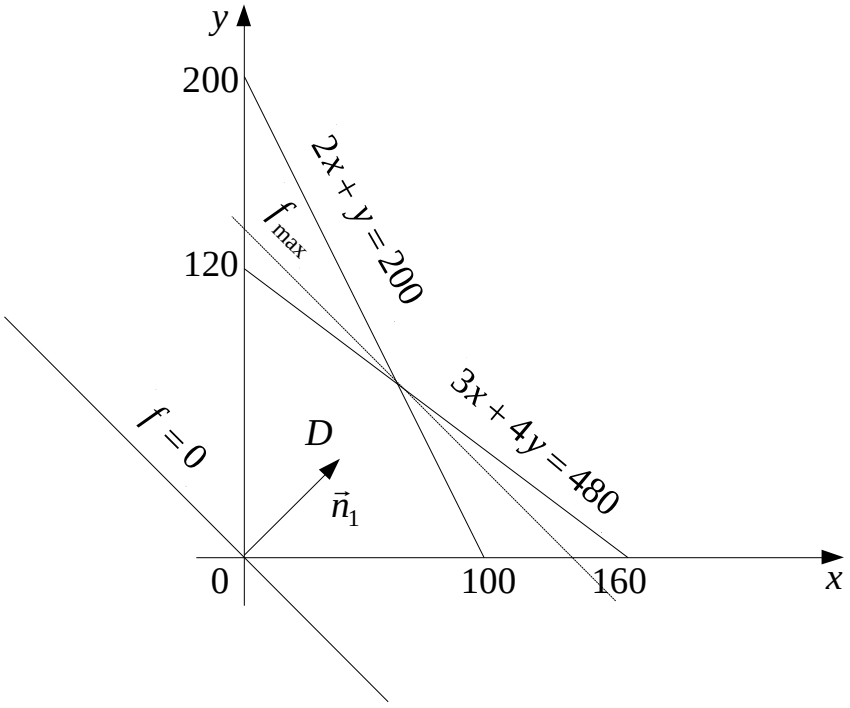


Рис. 8

Решая систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=200, \\ 3x+4y=480, \end{cases}$ получаем координаты точки $(64;72)$, в которой и будет оптимальное решение.

Таким образом, необходимо выпускать: изделий A – 64; изделий B – 72. При этом доход от реализации составит $400\cdot 64+400\cdot 72=54400$ денежных единиц.

Графическим методом можно решать и задачи со многими переменными, если в канонической записи задачи разность между числом переменных n и числом линейно независимых уравнений r равно двум, т.е. $n-r=2$.

Преобразовав модель такой задачи к симметрической форме, получим ЗЛП с двумя переменными, которую и решают графически.

Пример 3. Решите задачи линейного программирования графическим методом:

$$f=2x_1-x_2-2x_3+6x_4\to\max;$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+3x_4=16, \\ -x_1+x_2+3x_3-x_4=8, \end{array}\right\}$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=1,...,4).$$

Решение. Коэффициенты ограничительных уравнений

$$x_1+x_2+x_3+3x_4=16, \qquad (1)$$

$$-x_1+x_2+3x_3-x_4=8 \qquad (2)$$

не пропорциональны, следовательно, уравнения линейно независимы. Кроме того, $n-r=4-2=2$. Следовательно, задачу можно решить графически.

Вычитая, а затем складывая уравнения (1) и (2) системы ограничений, получим эквивалентную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 12. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Учитывая неотрицательность переменных x_1 и x_2 в системе (3), заменим ее эквивалентной системой неравенств

$$\left.\begin{array}{l} -x_3 + 2x_4 \le 4, \\ 2x_3 + x_4 \le 12. \end{array}\right\}$$

Исключим из целевой функции переменные x_1 и x_2, используя равенства (3):

$$f = 2(4 + x_3 - 2x_4) - (12 - 2x_3 - x_4) - 2x_3 + 6x_4,$$

$$f = -4 + 2x_3 + 3x_4.$$

Таким образом, пришли к симметрической форме записи данной задачи:

$$f = -4 + 2x_3 + 3x_4 \to \max,$$

$$\left.\begin{array}{l} -x_3 + 2x_4 \le 4, \\ 2x_3 + x_4 \le 12, \end{array}\right\}$$

$$x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Решая графическим методом полученную двумерную задачу, получим, что максимум функции $f = -4 + 2x_3 + 3x_4$ достигается в вершине B (рис. 3).

Координаты $x_3^* = 4$ и $x_4^* = 4$ вершины найдем B находятся при решении системы уравнений $\left.\begin{array}{l} -x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_3 + x_4 = 12. \end{array}\right\}$

Подставляя значения $x_3^* = 4$ и $x_4^* = 4$ в уравнения (1) и (2), определим координаты $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 0$ точки оптимума. Таким образом, в точке $x^* = (0;0;4;4)$ $f_{\max} = 16$.

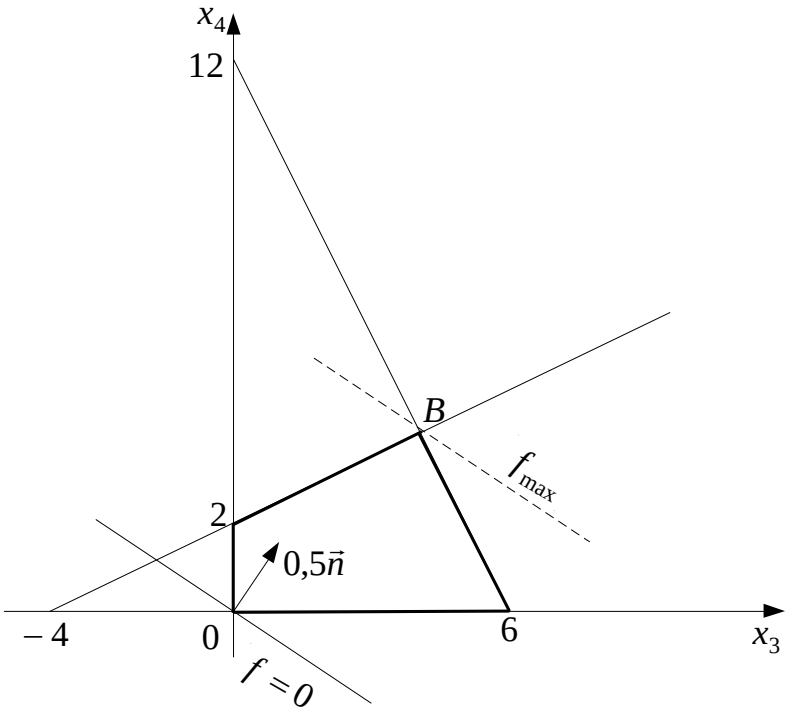


Рис. 3

Упражнения

Задачи 1 – 10 решить графически.

1. $f = 2x_1 + x_2 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

2. $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

3. $f = 4x_1 - 6x_2 \to \min$;

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 \ge 0, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

4. $f = x_1 + 3x_2 \to \max\ (\min)$;

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,5, \\ 0 \le x_2 \le 1. \end{array}\right\}$$

5. $f = 4x_1 + 2x_2 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 30, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

6. $f = 4x_1 + 10x_2 \to \min$;

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7. $f = -x_1 + x_2 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ 10x_1 - 4x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 20, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

8. $f = 6x_1 + 3x_2 \to \min$;

$$\left.\begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 6, \\ x_1 \le 7, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

9. $f = -3x_1 + x_2 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 \le 0, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \ge 18, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

10. $f = 2x_1 + 5x_2 \to \min$;

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

11. Фирма выпускает два вида мороженного: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженного используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженного и суточные запасы даны в следующей таблице:

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженного		Запас, кг
	сливочное	шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,5	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженное превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженное не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженного 16 рублей, шоколадного – 14 рублей.

Какое количество мороженного каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

12. Собственные средства банка вместе с депозитами составляют 100 млн ден. ед. Не менее 35 млн ден. ед. этих средств должно быть размещено в кредитах, доходность которых составляет 15 %. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить их в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или во всяком случае без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы –ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Пусть в данном случае ценные бумаги должны составлять не менее 30 % средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах, а их доходность составляет 10 %.

Требуется сформировать оптимальный пакет активов, максимизирующий прибыль банка.

13. Завод производит два вида продукции: велосипеды и мотоциклы. При этом цех по сборке велосипедов имеет мощность 100 тыс. штук в год, цех по сборке мотоциклов – 30 тыс. Механические цеха завода оснащены взаимозаменяемым оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тыс. велосипедов, либо детали для 40 тыс. мотоциклов, либо любую комбинацию деталей, ограниченную этими данными. Другая

группа механических цехов может выпускать детали либо для 80 тыс. велосипедов, либо для 60 тыс. мотоциклов, либо любую допустимую их комбинацию. В результате реализации каждой тысячи велосипедов завод получает прибыль в 2 тыс. ден. ед., а каждой тысячи мотоциклов – 3 тыс. ден. ед.

Найти такое сочетание объемов выпуска продукции, которое дает наибольшую сумму прибыли.

14. При подкормке посева необходимо внести в расчете на один гектар почвы не менее 25 ед. вещества B_1, не менее 30 ед. вещества B_2 и не менее 60 ед. вещества B_3. Есть возможность приобрести удобрения Y_1 и Y_2. Цена единицы веса удобрения Y_1 равна 4 ден. ед., а цена единицы веса удобрения Y_2 равна 8 ден. ед.

Дана матрица $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\\ 3 & 12\end{pmatrix}$, в которой элемент на пересечении строки i и столбца k равен количеству вещества B_i, содержащемуся в единице удобрения Y_k.

Найти план закупки удобрений, обеспечивающий подкормку посева с соблюдением указанных норм и гарантирующий минимальные денежные затраты.

15. С поля на овощную базу перевозятся овощи автомашинами грузоподъемностью по 5 и 10 тонн. За 1 ч база может принять не более 10 машин, при этом не более 8 машин по 5 тонн и не более 6 машин по 10 тонн.

Сколько машин по 5 и 10 тонн нужно отправлять с поля на базу за 1 ч, чтобы перевезти наибольшее количество овощей?

16. С железнодорожных станций A и B нужно развести грузы на склады № 1, № 2 и № 3. На станции A весь груз можно погрузить на 80 машин, а на станции B – на 100 машин. Склады должны принять: № 1 – 50 машин, № 2 – 70 машин, № 3 – 60 машин. Количество бензина в литрах, которое расходует одна машина на пробег от станции до склада, задается следующей таблицей:

Станции	Склады		
	№ 1	№ 2	№ 3
A	2	4	5
B	4	5	3

Требуется составить план перевозок, при котором расход бензина будет наименьшим.

17. Решить графически ЗЛП:

$$f=16x_1+x_2-x_3-5x_4-5x_5\to \max\,(\min);$$

$$\left.\begin{array}{l}2x_1+x_2+x_3=20,\\ -2x_1+3x_2+x_4=12,\\ 2x_1+4x_2-x_5=16,\end{array}\right\}$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=\overline{1,5}).$$

18. Решить графически следующие задачи:

а)
$$f = 2x_1 + 3x_2 (\max)$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 8; \\ 2x_2 \leq 5; \\ x_1 \leq 4; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$$

б)
$$f = x_1 + 3x_2 (\max)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 \leq 55; \\ 11x_1 + 12x_2 \leq 132; \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 5; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2.$$

в)
$$f = 2x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \leq 8; \\ 2x_1 - x_2 \leq 4; \\ x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Ответы: а) X*(4; 2,5), f_{max} = 15,5; б) X*(5;5), f_{max} = 20; е) X*(0; 1), f_{min}=1.

3. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Графический метод решения ЗЛП удобно применять в случае двух или трех переменных. Если число переменных в задаче больше трех, то для решения такой ЗЛП применяют симплексный метод (симплекс-метод).

Симплекс-метод включает в себя два основных этапа: построение начального опорного плана и последовательное улучшение опорного плана.

1. Построение начального опорного плана

Пусть дана ЗЛП в нормальной форме. Требуется найти максимальное значение функции

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max, . \qquad (22)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} . \qquad (23)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,...,n. . \qquad (24)$$

Сделаем допущение:

$$b_j \geq 0, \quad j = \overline{1,m}. . \qquad (25)$$

Перейдем к канонической системе записи. Для этого к левым частям неравенств (23) следует добавить дополнительные переменные $x_{n+j} \geq 0$, $j = \overline{1,m}$. В результате получится эквивалентная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} . \qquad (26)$$

$$x_i \geq 0, \quad b_j \geq 0, \quad i = \overline{1,n+m}, \quad j = \overline{1,m}. . \qquad (27)$$

В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами, равными нулю:

$$c_{n+j} = 0, \quad j = \overline{1,m}. \qquad (28)$$

Система ограничений (26)-(27) имеет канонический вид. Кроме того, каждое равенство в (26) содержит одну переменную, которая входит в данное уравнение с коэффициентом, равным единице, а во все остальные уравнения с коэффициентом, равным нулю. Такой вид системы ограничений называется предпочтительным.

Теорема. Если система ограничений имеет симметричный вид, то она всегда может быть приведена к предпочтительному виду.

Переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ в данном случае соответствуют базису и называются базисными переменными, а переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются свободными. Если свободные переменные приравнять нулю, а базисные переменные примут при этом неотрицательные значения, то полученное частное решение системы ограничений (26) называется опорным решением (планом).

Экономический смысл вводимых дополнительных переменных состоит в том, что они показывают объемы (запасы) неизрасходованного сырья каждого вида.

2. Признак оптимальности опорного плана. Симплекс-таблицы

Рассмотрим ЗЛП (26)-(27), записанную в предпочтительном виде. Введем обозначения:

$$\Delta_0 = z_0 = c_{n+1}b_1 + c_{n+2}b_2 + \cdots + c_{n+m}b_m. \qquad (29)$$

$$z_j = c_{n+1}a_{1j} + c_{n+2}a_{2j} + \cdots + c_{n+m}a_{mj}. \qquad (30)$$

$$\Delta_j = z_j - c_j = (c_{n+1}a_{1j} + c_{n+2}a_{2j} + \cdots + c_{n+m}a_{mj}) - c_j \qquad (31)$$

где $(c_{n+1}, c_{n+2}, \cdots, c_{n+m})$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных; $(b_1, b_2, \cdots, b_m)$ – вектор-столбец свободных членов; $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})$ – вектор-столбец коэффициентов при переменных x_j, $j = \overline{1,n}$

Теперь можно сформулировать теоремы, которые позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Теорема. Опорный план задачи (26)-(27) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для всех j, $j = \overline{1,n}$.

Теорема. Если для некоторого $j = k$ $\Delta_k < 0$ и среди чисел a_{ik} $(i = \overline{1,m})$ нет положительных $(a_{ik} \leq 0)$, то целевая функция (22) задачи (26)–(27) не ограничена сверху на множестве ее планов.

На практике исследование опорного плана на оптимальность, а также дальнейшие вычисления проводят, записав условия задачи и первоначальный опорный план в таблицу, которая называется симплексной (таблица 2).

Таблица 2

c	Базисные переменные	b	c_1	c_2	…	c_n	0	…	0
			x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}
0	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	…	0
0	x_{n+2}	b_1	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	…	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	0	…	1
	z_j	z_0	z_1	z_2	…	z_n	z_{n+1}	…	z_{n+m}
	$z_j - c_j$	Δ_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_n	Δ_{n+1}	…	Δ_{n+m}

В верхней строке укажем коэффициенты целевой функции, а в первом (левом) столбце (c) этой таблицы еще раз запишем коэффициенты целевой функции, но теперь уже только те, которые стоят при базисных переменных.

В третьем столбце (b) будем записывать компоненты исходного опорного плана. В этом же столбце в результате вычислений получатся компоненты оптимального плана. В столбцы $x_1, x_2, ..., x_n$ записывают столбцы коэффициентов при свободных переменных, а в столбцы $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ – столбцы коэффициентов при базисных переменных.

Таким образом, в таблице 2 первые m строк определяются исходными данными задачи, а элементы двух последних строк вычисляются. Нижняя $(m+2)$-я строка называется индексной строкой. В индексной строке Δ_0 – значение целевой функции, которое она принимает при данном опорном плане, числа Δ_j вычисляются по формуле (29) и называются оценками соответствующих переменных.

После заполнения таблицы 2 исходный опорный план проверяют на оптимальность. Для этого анализируют элементы нижней строки таблицы. Если все $\Delta_j \geq 0$, то исходный план является оптимальным. Если существует такой столбец, в котором $\Delta_j < 0$ и при этом в j-том столбце все элементы $a_{ij} \leq 0$, то целевая функция не ограничена на множестве допустимых решений. В остальных случаях осуществляется переход от исходного опорного плана к новому опорному плану по симплекс-методу. Известно, что значение целевой функции после симплексного преобразования не уменьшается.

3. Алгоритм преобразования симплекс-таблиц

Найти разрешающий элемент. Для этого:

- в нижней (индексной) строке таблицы выбрать наименьшее отрицательное число $\Delta_k < 0$, $k = \overline{1, n+m}$ (столбец свободных членов не учитывать). Столбец, в котором находится это число, называется разрешающим (ключевым). Если такого числа нет, то полученное базисное решение является оптимальным и таблица далее не преобразуется;
- в разрешающем столбце найти положительные коэффициенты a_{ik}. Если таких коэффициентов нет, то целевая функция неограниченна на области допустимых решений и задача решений не имеет;
- среди выбранных коэффициентов столбца выбрать тот, для которого абсолютная величина отношения соответствующего свободного члена b_i (находящегося в столбце свободных членов) к этому элементу минимальна, т.е. $\min\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\right)$ для всех $a_{ik} > 0$. Этот элемент называется разрешающим (ключевым), а строка, в которой он находится, – разрешающей (ключевой).

☑ Преобразовать базис. Для этого:

- базисную переменную x_p, отвечающую строке разрешающего элемента, вывести из числа базисных и перевести в разряд свободных;
- свободную переменную x_k, отвечающую столбцу разрешающего элемента, ввести в число базисных.

☑ Пересчитать элементы таблицы. Для этого:

- построить новую таблицу, содержащую новые названия базисных переменных и соответствующие им значения коэффициентов целевой функции (первый и второй столбец таблицы);
- разделить каждый элемент ключевой строки на разрешающий элемент, полученные значения записать в строку с измененной базисной переменной новой симплекс-таблицы (в таблице эта строка занимает прежнее место, но соответствует новой базисной переменной);
- все элементы ключевого столбца в новой таблице положить равными нулю, кроме разрешающего элемента, который положить равным единице;
- в остальные клетки новой таблицы записать результаты преобразований элементов старой таблицы по формулам:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{pk} - a_{pj}a_{ik}}{a_{pk}} \qquad (32)$$

$$b'_i = \frac{b_i a_{pk} - b_p a_{ik}}{a_{pk}} \qquad (33)$$

$$\Delta'_j = \frac{\Delta_j a_{pk} - a_{pj}\Delta_k}{a_{pk}} \qquad (34)$$

$$\Delta'_0 = \frac{\Delta_0 a_{pk} - b_p \Delta_k}{a_{pk}} \qquad (35)$$

Замечание 1. Формулы (32) – (35) удобны для запоминания, однако ведут к избыточным вычислениям. Для практических целей лучше использовать упрощенный вариант этих формул:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{pj} a_{ik}}{a_{pk}} \qquad (36)$$

$$b'_i = b_i - \frac{b_p a_{ik}}{a_{pk}} \qquad (37)$$

$$\Delta'_j = \Delta_j - \frac{a_{pj}\Delta_k}{a_{pk}} \qquad (38)$$

$$\Delta'_0 = \Delta_0 - \frac{b_p \Delta_k}{a_{pk}} \qquad (39)$$

Замечание 2. Если в ключевой строке некоторого столбца содержится 0, то в новой таблице этот столбец не изменится.

Замечание 3. Если в ключевом столбце некоторой строки содержится 0, то в новой таблице эта строка не изменится.

В результате применения алгоритма будет получена новая симплекс-таблица, отвечающая новому базисному решению. Если в индексной строке новой симплекс-таблицы нет отрицательных значений (кроме стоящего на месте свободного столбца), то получено оптимальное решение. В противном случае снова применяется алгоритм преобразования симплекс-таблиц.

Итак, решение задач линейного программирования симплекс-методом включает следующие этапы:

1) нахождение начального опорного плана;

2) составление симплекс-таблицы;

3) проверка опорного плана на оптимальность;

4) преобразование (в случае необходимости) симплекс-таблицы и построение нового опорного плана.

Пример 1. Решить ЗЛП:

$$f = -x_4 + x_5 \to \max \ ;$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,5}).$$

Решение. Система уравнений-ограничений $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \end{array}\right\}$ совместна, поскольку ранги матрицы системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и расширенной матрицы системы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ совпадают и равны 3. Таким образом, система уравнений совместна, три базисные переменные можно выразить через две свободные. Выразим, например, переменные x_1, x_2, x_3 через x_4 и x_5, т.е. приведем систему к единичному базису:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Целевую функцию $f = -x_4 + x_5$ выразим через свободные переменные x_4 и x_5 (в рассматриваемом примере она уже выражена).

При $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ базисные переменные будут равны: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Таким образом, $(1;2;3;0;0)$ – первое допустимое решение системы уравнений.

Целевая функция f при найденном допустимом решении имеет значение 0: $f = 0$.

Попытаемся сейчас увеличить значение целевой функции. Заметим, что увеличение x_4 уменьшит значение целевой функции $f = 0$, так как перед переменной x_4 стоит отрицательный коэффициент, а увеличение x_5 увеличит и найденное значение целевой функции.

Увеличиваем x_5 так, чтобы x_1, x_2, x_3 не стали отрицательными, оставив $x_4 = 0$. Из второго уравнения системы (3) видим, что x_5 можно увеличивать до 2.

Тогда $(5;0;1;0;2)$ – второе допустимое решение. Значение целевой функции при втором допустимом решении равно 2: $f = 2$.

Видим, что на втором шаге значение целевой функции увеличилось.

Примем далее за свободные переменные x_2 и x_4, т.е. те, которые в новом решении имеют нулевые значения. Для этого выразим из второго уравнения системы (3) переменную x_5 через переменные x_2 и x_4: $x_5 = 2 - x_2 + 2x_4$.

Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

$$f = 2 - x_2 + x_4.$$

Попытаемся снова увеличить значение целевой функции f. Заметим, что увеличение x_4 даст и увеличение функции f, поскольку перед x_4 стоит положительный коэффициент. увеличиваем x_4 так, чтобы x_1, x_3, x_5 не стали отрицательными, оставив $x_2 = 0$.

Из второго уравнения системы (4) видим, что значение x_4 можно увеличивать до $1-5x_4 \ge 0$, $x_4 \le \frac{1}{5}$.

При этом условии $\left(\frac{28}{5};0;0;\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right)$ – третье допустимое решение. Значение линейной функции f при этом третьем допустимом решении равно $\frac{11}{5}$. Видим, что значение функции f на третьем шаге увеличилось.

Выразим сейчас переменные x_1, x_4, x_5 через свободные переменные x_2, x_3

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{28}{5} - \frac{5}{3}x_3 - \frac{7}{5}x_2, \\ x_4 &= \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2, \\ x_5 &= \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2, \end{aligned}\right\}$$

тогда $f = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{4}x_2$.

Поскольку в линейной функции обе свободные переменные входят с отрицательными коэффициентами, поэтому наибольшее значение функции f достигается при $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Это свидетельствует о том, что решение $\left(\frac{28}{5};0;0;\frac{1}{5};\frac{12}{5}\right)$ является оптимальным и $f_{\max} = \frac{11}{5}$.

Для удобства перехода от одного опорного решения системы условий ЗЛП к другому, на котором целевая функция f принимает значение не меньшее, чем на предыдущем, составляют так называемую *симплекс-таблицу*.

Проиллюстрируем процесс заполнения таблицы на примере следующей ЗЛП:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,4}).$$

Как известно, если $b_1 \ge 0$, $b_2 \ge 0$, то начальный опорный план имеет вид $\bar{x}_0 = (b_1, b_2, 0, 0)$. Значение целевой функции, соответствующее этому плану, равно $f_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2$.

Составим начальную симплекс-таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	Симплексные отношения
			c_1	c_2	c_3	c_4	
x_1	c_1	b_1	1	0	a_{13}	a_{14}	b_i / a_{ij}
x_2	c_2	b_2	0	1	a_{23}	a_{24}	
$f_j - c_j$		Δ_0	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	

В столбце *БП* записываются базисные переменные. Столбец $C_Б$ содержит коэффициенты целевой функции, стоящие при базисных переменных. Столбец A_0 содержит свободные члены $b_i \geq 0$ системы ограничений. Коэффициенты a_{ij} системы ограничений занимают основное поле таблицы. Сверху над рабочей частью таблицы указаны все переменные и коэффициенты c_j целевой функции. Последний столбец «Симплексные отношения» (необязательный) предназначен для выбора разрешающей строки.

Последняя строка $f_j - c_j$ называется индексной или строкой оценок. Рассмотрим подробнее заполнение индексной строки. Здесь расположены значения целевой функции для начального опорного плана $\bar{x}_0 = (b_1, b_2, 0, 0)$, т.е. $f(\bar{x}_0) = \Delta_0 = (c_1, c_2) \cdot (b_1, b_2) = \bar{C}_Б \cdot \bar{A}_0$, и оценки индексной строки $\Delta_j = \bar{C}_Б \cdot \bar{A}_j - c_j$.

Пример 2. Занести условия задачи в симплексную таблицу и записать ее начальный опорный план:

$$f = -5x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 48, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,4}).$$

Решение. Каждое ограничение ЗЛП имеет предпочтительный вид, так как при неотрицательности его правой части $(b_i \geq 0)$ левая часть содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а остальные ограничения – с коэффициентом, равным нулю.

Переменные x_3 и x_4 являются базисными, x_1 и x_2 – свободными. Заносим условия задачи в симплексную таблицу.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			-5	7	-1	2
x_3	-1	8	-2	1	1	0
x_4	2	48	3	-8	0	1
$f_j - c_j$		88	13	-24	0	0

Индексная строка $f_j - c_j$ заполнена по известным формулам $\Delta_0 = \bar{C}_Б \cdot \bar{A}_0$, $\Delta_j = \bar{C}_Б \cdot \bar{A}_j - c_j$:

$$\Delta_0 = (-1) \cdot 8 + 2 \cdot 48 = 88,$$
$$\Delta_1 = (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 - (-5) = 13,$$
$$\Delta_2 = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-8) - 7 = -24,$$
$$\Delta_3 = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 - (-1) = 0,$$
$$\Delta_4 = (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 = 0.$$

Приравнивая x_1 и x_2 нулю, находим $x_3 = 8$, $x_4 = 48$. Таким образом, начальный опорный план $\bar{x}_0 = (0; 0_2; 8; 48)$. В столбце A_0 индексной строки получено значение $\Delta_0 = 88$ целевой функции, соответствующее плану $\bar{x}_0$.

Заметим, что по симплексной таблице четко видны результаты исследования.

Пример 3. С помощью симплекс-метода определим сколько нужно произвести изделий каждого вида согласно условию задачи из примера 1, чтобы предприятие получило максимальную прибыль.

Решение. Исходная математическая модель сводилась к ЗЛП в симметричной форме:

$$F(X) = 9x_1 + 7x_2 \to \max. \tag{40}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 470, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 1600, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 2060, \end{cases} \tag{41}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{42}$$

Приведем задачу к канонической форме. Для этого к левым частям каждого неравенства системы ограничений (41) прибавим дополнительную переменную, после чего все неравенства преобразуются в равенства:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 470, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_4 = 1600, \\ 7x_1 + 2x_2 + x_5 = 2060. \end{cases} \tag{43}$$

Полученная система ограничений имеет предпочтительный вид, начальный опорный план можно записать в виде

$X = (0,0,470,1600,2060)$.

Экономический смысл первоначального опорного плана состоит в том, что согласно этому плану будет выпускаться 0 изделий первого вида и 0 изделий второго вида. При этом останется неиспользованными 470 единиц первого сырья, 1600 единиц второго сырья и 2060 единиц третьего сырья. Очевидно, что такой план далек от оптимального, однако он является допустимым опорным планом.

Составим симплексную таблицу для первого шага (таблица 3). В первые три строки заносим данные из условия. При заполнении четвертой и пятой строк производим вычисления:

$z_0 = 470 \cdot 0 + 1600 \cdot 0 + 2060 \cdot 0 = 0$,

$z_1 = 1 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0$,

$z_2 = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$,

$z_3 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$,

$z_4 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$,

$z_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$,

$\Delta_0 = z_0 = 0$,

$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9$,

$\Delta_2 = z_2 - c_2 = 0 - 7 = -7$,

$\Delta_3 = z_3 - c_3 = 0 - 0 = 0$,

$\Delta_4 = z_4 - c_4 = 0 - 0 = 0$,

$\Delta_5 = z_5 - c_5 = 0 - 0 = 0$.

Таблица 3

c	Базис	b	9	7	0	0	0	Отношения
			$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	470	1	2	1	0	0	470
0	x_4	1600	5	4	0	1	0	320
0	$\leftarrow x_5$	2060	7	2	0	0	1	$294\frac{2}{7}$
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	0	–9	–7	0	0	0	

В нижней строке содержатся два отрицательных числа. Следовательно, полученный план не является оптимальным. Для перехода к новому опорному плану выполним преобразования симплекс-таблицы.

Находим в нижней строке наибольшее по абсолютной величине отрицательное число. Это число –9, расположенное в первом столбце. Выделяем первый столбец как разрешающий и вводим в базис переменную x_1 .

Вычисляем отношения $\frac{b_i}{a_{ij}}$ для положительных элементов первого столбца и выбираем наименьшее:

$$\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{470}{1} = 470;\ \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{1600}{5} = 320;\ \frac{b_3}{a_{31}} = \frac{2060}{7} = 294\frac{2}{7};$$

$$\min\left(470;320;294\frac{2}{7}\right) = 294\frac{2}{7}.$$

Наименьшее отношение находится в третьей строке, следовательно, эта строка является разрешающей, а разрешающим элементом является элемент 7, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца. Из базиса исключаем переменную x_5 .

Составляем симплекс-таблицу для второго шага (таблица 4). Все элементы разрешающей (третьей) строки делим на разрешающий элемент (т.е. 7). Элементы разрешающего (первого) столбца заполняем нулями, кроме $a_{13} = 1$. Другие базисные столбцы можно переписать без изменений. Все остальные элементы таблицы пересчитываем по формулам (36)-(39).

Таблица 4

c	Базис	b	9	7	0	0	0	Отношения
			x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	$\frac{1230}{7}$	0	$\frac{12}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	102,5
0	← x_4	$\frac{900}{7}$	0	$\frac{18}{7}$	0	1	$-\frac{5}{7}$	50
9	x_1	$\frac{2060}{7}$	1	$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	1030
	z_j	$\frac{18540}{7}$	9	$\frac{18}{7}$	0	0	$\frac{9}{7}$	
	$z_j - c_j$	$\frac{18540}{7}$	0	$-\frac{31}{7}$	0	0	$\frac{9}{7}$	

Заполняем две нижние строки:

$$z_0 = \frac{1230}{7}\cdot 0 + \frac{900}{7}\cdot 0 + \frac{2060}{7}\cdot 9 = \frac{18540}{7},$$

$$z_1 = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 9 = 9,$$

$$z_2 = \frac{12}{7}\cdot 0 + \frac{18}{7}\cdot 0 + \frac{2}{7}\cdot 9 = \frac{18}{7},$$

$$z_3 = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 9 = 0,$$

$$z_4 = 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 9 = 0,$$

$$z_5 = -\frac{1}{7}\cdot 0 - \frac{5}{7}\cdot 0 + \frac{1}{7}\cdot 9 = \frac{9}{7},$$

$$\Delta_0 = z_0 = \frac{18540}{7},$$

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 9 - 9 = 0,$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = \frac{18}{7} - 7 = -\frac{31}{7},$$

$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5 = z_5 - c_5 = \frac{9}{7} - 0 = \frac{9}{7}.$$

В нижней строке остается один отрицательный элемент. В связи с этим выполняем еще одно преобразование симплекс-таблицы.

Разрешающим столбцом теперь является второй (он содержит отрицательное число в индексной строке), а индексную строку находим из величины соотношений $\frac{b_i}{a_{ij}}$ для положительных элементов второго столбца:

$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{1230}{7} : \frac{12}{7} = \frac{1230}{12} = 102{,}5$; $\frac{b_2}{a_{22}} = \frac{900}{7} : \frac{18}{7} = \frac{900}{18} = 50$; $\frac{b_3}{a_{32}} = \frac{2060}{7} : \frac{2}{7} = \frac{2060}{2} = 1030$;

$\min(102{,}5;50;1030) = 50$.

Минимальное отношение находится во второй строке и эту строку мы берем в качестве разрешающей. Разрешающий элемент равен $\frac{18}{7}$. Переменную x_4 выводим из базиса, а переменную x_2 вводим в него. Снова пересчитываем все элементы симплекс-таблицы и получаем таблицу 5.

Таблица 5

c	Базис	b	9	7	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	90	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
7	x_2	50	0	1	0	$\frac{7}{18}$	$-\frac{5}{18}$
9	x_1	280	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
	z_j	2870	9	$\frac{18}{7}$	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{9}{7}$
	$z_j - c_j$	2870	0	0	0	$\frac{31}{18}$	$\frac{1}{18}$

В последней строке полученной таблицы 5 нет отрицательных оценок Δ_j. Следовательно, полученный опорный план исходной задачи $X^* = (280;50)$ является оптимальным. При этом плане значение целевой функции равно 2870. Полученный результат полностью согласуется с результатом, полученным для этой задачи графическим методом.

Ячейки симплекс-таблицы имеют определенный экономический смысл. Так третья и вторая колонки показывают, что оптимальный план выпуска продукции состоит в том, что должно быть выпущено 50 изделий первого вида и 280 изделий второго вида, при этом останутся неизрасходованными 90 единиц сырья первого вида, а прибыль предприятия составит 2870 единиц.

Замечание 4. Поскольку $\min f = -\max(-f)$, то задачу минимизации можно заменить задачей максимизации функции $-f$.

Например, при решении задачи

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n};).$$

решаем задачу

$$f_1 = -f = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,n};).$$

Замечание 5. Признак бесконечности множества оптимальных планов. Если индексная строка последней симплексной таблицы. Содержащей оптимальный план, имеет хотя бы одна нулевая оценка, соответствующая свободной переменной, то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов.

Пример 4. Решить симплексным методом ЗЛП:

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 34, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 22, \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1;2;3;4\ .$$

Решение. Прежде, чем решить эту задачу симплекс-методом, приведем ее к каноническому виду, добавив к левым частям неравенств ограничений неотрицательные переменные x_5, x_6, x_7.

В канонической форме ЗЛП примет вид:

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 34, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_6 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_7 = 22, \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1;2;3;4;5;6;7\ .$$

Очевидно, что x_5, x_6, x_7 – базисные переменные, при этом переменные x_1, x_2, x_3, x_4 будут свободными, поэтому $(0;0;0;0;34;16;22)$ – начальный опорный план задачи

Составим начальную симплекс-таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	.2	0	0	0
x_5	0	34	2	4	1	5	1	0	0
x_6	0	16	4	1	4	1	0	1	0
x_7	0	22	2	3	1	2	0	0	1
$f_j - c_j$		0	-7	-3	-4	-2	0	0	0

$$\Delta_0 = 0\cdot 34 + 0\cdot 16 + 0\cdot 22 = 0,$$
$$\Delta_1 = 0\cdot 2 + 0\cdot 4 + 0\cdot 2 - 7 = -7,$$
$$\Delta_2 = 0\cdot 4 + 0\cdot 1 + 0\cdot 3 - 3 = -3,$$
$$\Delta_3 = 0\cdot 1 + 0\cdot 4 + 0\cdot 1 - 4 = -4,$$
$$\Delta_4 = 0\cdot 5 + 0\cdot 1 + 0\cdot 2 - 2 = -2,$$

Аналогично $\Delta_5 = \Delta_6 = \Delta_7 = 0$.

Содержащийся в этой таблице план не является опорным, поскольку в индексной строке имеются отрицательные элементы.

Будем улучшать его, переходя от одного базиса системы к другому. Выберем разрешающий столбец, как столбец, соответствующий наибольшей по модулю отрицательной оценке, т.е. $\max\{|-7|;|-3|;|-4|;|-2|\}$. Таким образом, в качестве разрешающего столбца выбираем столбец, соответствующий свободной переменной x_1.

Вычислим симплексные отношения: $\frac{b_i}{a_{i1}}$. Получим: $\frac{34}{2} = 17$, $\frac{16}{4} = 4$, $\frac{22}{2} = 11$. Находим разрешающую строку по наименьшему симплексному отношению: $\min\{17;4;11\} = 4$.

Таким образом, разрешающим элементом является элемент 4, стоящий на пересечении строки для x_6 и столбца для x_1 (выделен в таблице).

Переменную x_6 выведем из базиса, а переменную x_1 введем в базис. Элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент $a_{21} = 4$. Все элементы разрешающего столбца заменяем нулями, кроме $a'_{21} = 1$, а все остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу: из соответствующего элемента прежней таблицы вычитаем произведение элемента разрешающей строки на элемент разрешающего столбца, разделенное на разрешающий элемент $\left(a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i_0 j}\cdot a_{i j_0}}{a_{i_0 j_0}} \right)$.

Строим следующую таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	2	0	0	0
x_5	0	26	0	$\frac{7}{2}$	-1	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_1	7	4	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
x_7	0	14	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1
$f_j - c_j$		28	0	$-\frac{5}{4}$	3	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	0

Заполняя таблицы, необходимо после каждой итерации делать контрольные проверки. Для первой итерации пересчитаем значение $\Delta_0 = f_1 = 0\cdot 26 + 7\cdot 4 + 0\cdot 14 = 28$.

Пересчитаем все оценки:

$$\Delta_1 = 0\cdot 0 + 7\cdot 1 + 0\cdot 0 - 7 = 0,$$

$$\Delta_2 = 0\cdot \frac{7}{2} + 7\cdot \frac{1}{4} + 0\cdot \frac{5}{2} - 3 = -\frac{5}{4},$$

$$\Delta_3 = 0\cdot (-1) + 7\cdot 1 + 0\cdot (-1) - 4 = 3,$$

$$\Delta_4 = 0\cdot \frac{9}{2} + 7\cdot \frac{1}{4} + 0\cdot \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{4},$$

$$\Delta_5 = 0\cdot 1 + 7\cdot 0 + 0\cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_6 = 0\cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 7\cdot \frac{1}{4} + 0\cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{7}{4},$$

$$\Delta_7 = 0\cdot 0 + 7\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0.$$

Анализируя полученные результаты, видим, что пока еще не получен оптимальный план, так как в индексной строке имеются отрицательные элементы.

Повторим наши преобразования, выбрав разрешающий элемент, равный $\frac{5}{2}$. В результате получим следующую симплекс-таблицу.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	2	0	0	0
x_5	0	$\frac{32}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{5}$
x_1	7	$\frac{13}{5}$	1	0	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	3	$\frac{28}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$f_j - c_j$		35	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Осуществим контроль вычислений элементов индексной строки:

$$\Delta_0 = 0\cdot \frac{32}{5} + 7\cdot \frac{13}{5} + 3\cdot \frac{28}{5} = 35,$$

$$\Delta_1 = 0\cdot 0 + 7\cdot 1 + 3\cdot 0 - 7 = 0,$$

$$\Delta_2 = 0\cdot 0 + 7\cdot 0 + 3\cdot 1 - 3 = 0,$$

$$\Delta_3 = 0\cdot \frac{4}{5} + 7\cdot \frac{11}{10} - 3\cdot \frac{2}{5} - 4 = \frac{5}{2},$$

$$\Delta_4 = 0\cdot \frac{12}{5} + 7\cdot \frac{1}{10} + 3\cdot \frac{3}{5} - 2 = \frac{1}{2},$$

$$\Delta_5 = 0\cdot 1 + 7\cdot 0 + 3\cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_6 = 0\cdot \frac{3}{10} + 7\cdot \frac{3}{10} - 3\cdot \frac{1}{5} - 0 = \frac{3}{2},$$

$$\Delta_7 = 0\cdot \left(-\frac{7}{5}\right) + 7\cdot \left(-\frac{1}{10}\right) + 3\cdot \frac{2}{5} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Итак, в индексной строке последней таблицы нет ни одного отрицательного элемента, следовательно, содержащийся в ней план является оптимальным.

Выпишем его. Опорный план $\left(\frac{13}{5},\frac{28}{5},0,0,\frac{32}{5},0,0\right)$ является оптимальным, а соответствующее значение 35целевой функции будет максимальным.

Пример 4. Решить симплексным методом ЗЛП:

$$f = 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 \to \min;$$
$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + x_5 &= 2,\\ x_1 - x_3 + 2x_5 &= 4,\\ 3x_3 + x_4 - 3x_5 &= 1, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3;4;5.$$

Решение. Вместо минимизации функции f будем максимизировать функцию

$$\psi = -f = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5.$$

Таким образом, будем решать следующую задачу линейного программирования:

$$\psi = -f = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + x_5 &= 2,\\ x_1 - x_3 + 2x_5 &= 4,\\ 3x_3 + x_4 - 3x_5 &= 1, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3;4;5.$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу и решим данную ЗЛП по описанному выше алгоритму.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексные отношения
			–2	3	1	0	1	
x_2	3	2	0	1	2	0	1	$2/1 = 2 - \min$
x_1	–2	4	1	0	–1	0	2	$4/2 = 2$
x_4	0	1	0	0	3	1	–3	
$\psi_j - c_j$		–2	0	0	7	0	–2	

$$\Delta_0 = 3\cdot 2 - 2\cdot 4 + 0\cdot 1 = -2,$$
$$\Delta_1 = 3\cdot 0 - 2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2 = 0,$$
$$\Delta_2 = 3\cdot 1 - 2\cdot 0 + 0\cdot 0 - 3 = 0,$$
$$\Delta_3 = 3\cdot 2 - 2\cdot(-1) + 0\cdot 3 - 1 = 7,$$
$$\Delta_4 = 3\cdot 0 - 2\cdot 0 + 0\cdot 1 - 0 = 0,$$
$$\Delta_5 = 3\cdot 1 - 2\cdot 2 + 0\cdot(-3) - 1 = -2.$$

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Симплексные отношения
			–2	3	1	0	1	
x_5	1	2	0	1	2	0	1	
x_1	–2	0	1	–2	–5	0	0	
x_4	0	7	0	3	9	1	0	
$\psi_j - c_j$		2	0	2	11	0	0	

Индексная строка последней симплекс-таблицы не содержит отрицательных элементов. Следовательно, (0;0;0;7;2) – оптимальное решение. $f_{\min} = -\psi_{\max} = -2$.

Замечание 6. Используются и другие формы симплексных таблиц.

Пример 5. Решить симплексным методом следующую задачу линейного программирования:

$$f = 5x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 &\le 50, \\ x_2 &\le 40, \\ 2x_1 + x_2 &\le 80, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение. Приведем задачу к каноническому виду, добавив к левым частям неравенств ограничений неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5.

Поставленная задача в канонической форме примет вид:

$$f = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 50, \\ x_2 + x_4 &= 40, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 80, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Переменные x_3, x_4, x_5 являются базисными (БП), переменные x_1, x_2 – свободные (СП).

Составим симплекс-таблицу задачи: в столбец базисных переменных (БП) запишем базисные переменные, в столбец свободных членов (СЧ) занесем правые части уравнений ограничений. В последнюю (f-строку) запишем коэффициенты целевой функции с противоположными знаками. В остальные клетки таблицы запишем коэффициенты при свободных переменных (СП) в левых частях уравнений системы ограничений.

БП	СЧ	СП	
		x_1	x_2
x_3	50	1	0
x_4	40	0	1
x_5	80	2	1
f	0	–5	–3

Для нахождения опорного плана полагаем равными нулю свободные переменные: $x_1 = 0, x_2 = 0$. Базисные переменные будут равны соответствующим свободным членам системы ограничений: $x_3 = 50,\ x_4 = 40,\ x_5 = 80$.

Таким образом, начальный опорный план имеет вид: $\overline{x_0} = (0;0;50;40;80)$. Значение целевой функции при этом плане равно нулю (записано в столбце свободных членов f-строки).

Полученный план не является оптимальным, так как в f-строке имеются отрицательные элементы. Для улучшения плана выберем столбец с

наименьшим отрицательным элементом в f-строке (в нашем случае –5). Столбец, содержащий –5, и будет разрешающим.

Для нахождения разрешающей строки найдем наименьшее положительное отношение элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца: $\min\left\{\frac{50}{1};\frac{80}{2}\right\}=40$. Таким образом, разрешающей строкой является содержащая x_5 третья строка.

Разрешающим элементом будет 2, находящаяся на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца.

Находящуюся в разрешающей строке переменную x_5 выводим из базиса, а находящуюся в разрешающем столбце переменную x_1 вводим в базис, т.е. переменные x_5 и x_1 меняем местами.

Для нахождения нового опорного плана построим новую симплекс-таблицу, осуществляя следующие преобразования:

1) разрешающий элемент заменяем обратной величиной, т.е. вместо 2 записываем $\frac{1}{2}$;

2) остальные элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент (на 2);

3) остальные элементы разрешающего столбца делим на разрешающий элемент и меняем знак;

4) прочие элементы вычисляем по формуле $a'_{i\,j}=\frac{a_{i\,j}\cdot a_{i_0\,j_0}-a_{i_0\,j}\cdot a_{i\,j_0}}{a_{i_0\,j_0}}$ (по правилу прямоугольника). Здесь $a_{i\,j}$ – пересчитываемый элемент, расположенный в i-ой строке и j-ом столбце; $a_{i_0\,j_0}$ – разрешающий элемент; $a_{i_0\,j}$ – элемент, расположенный в разрешающей строке и j-ом столбце; $a_{i\,j_0}$ – элемент, расположенный в разрешающем столбце и i-ой строке; $a'_{i\,j}$ – элемент новой симплекс-таблицы.

Осуществив указанные выше вычисления, получим новую симплекс-таблицу:

БП	СЧ	СП	
		x_5	x_2
x_3	10	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_4	40	0	1
x_1	40	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f	200	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Построенный новый опорный план имеет следующий вид: $(40;0;10;40;0)$. Он не является оптимальным, так как в f-строке имеется отрицательный элемент $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Повторим наши преобразования, выбрав разрешающий элемент, равный 1. В результате получим следующую симплекс-таблицу.

БП	СЧ	СП	
		x_5	x_4
x_3	30	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	40	0	1
x_1	20	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
f	220	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

Полученный новый опорный план имеет следующий вид: $(20;40;30;0;0)$. Он оптимален, поскольку в f-строке все элементы неотрицательные. $f_{\max} = 5 \cdot 20 + 3 \cdot 40 = 220$.

Упражнения

Задачи 1 – 8 решить симплексным методом.

1. $f = 3x_1 + x_2 \to \max$;
$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 \le 40, \\ -5x_1 + 5x_2 \le 40, \end{aligned}\right\}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

2. $f = 2x_1 + 6x_2 \to \max$;
$$\left.\begin{aligned} -5x_1 + 2x_2 \le 0, \\ x_1 + 3x_2 \le 4, \end{aligned}\right\}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

3. $f = 2x_1 + 5x_2 \to \min$;
$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_2 \le 5, \\ x_1 \le 4, \end{aligned}\right\}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

4. $f = x_1 + 4x_2 \to \max$;
$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 \le 2, \end{aligned}\right\}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

5. $f = 4x_1 + 3x_2 \to \min$;
$$\left.\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 \le 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{aligned}\right\}$$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

6. $f = 2x_1 + 4x_2 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 12, \\ x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

7. $f = 3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + 2x_5 - x_7 + 9 \to \min$;

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_4 + x_5 + x_7 = 5, \end{array}\right\}$$

$x_i \ge 0 (i = 1,...,7)$.

8. $f = x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \le 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \le 3, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2, \end{array}\right\}$$

$x_i \ge 0 (i = 1,...,4)$.

9. Предприятие имеет возможность производить продукцию четырех видов $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$. При ее изготовлении используются ресурсы P_1, P_2, P_3, размеры допустимых затрат которых ограничены соответственно величинами 280, 80, 250 ед. Имеется матрица норм расхода ресурсов $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, в которой элемент a_{ik}, стоящий на пересечении i-ой строки и k-го столбца, равен количеству ресурса P_i, расходуемого на единицу продукции $П_k$.

Плановая себестоимость единицы продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$ соответственно равна 15, 12, 20, 13 денежных единиц, а оптовая цена – 19, 15, 26, 20 денежных единиц.

Требуется: составить математическую модель задачи, позволяющую найти план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль; симплексным методом найти оптимальный план выпуска продукции и максимальную величину прибыли.

10. Для строительства домов на 100 строительных площадках выбраны пять типовых проектов. По каждому из проектов известны: длительность закладки фундамента и строительства остальной части здания, а также жилая площадь дома.

Вид работы	Длительность выполнения (дни) для типового проекта				
	I	II	III	IV	V
Закладка фундамента	20	30	35	30	40
Остальные работы	40	20	60	35	25
Жилая площадь, кв. м	3000	2000	5000	4000	6000

Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 домов. Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади в течение года (300 рабочих дней), при условии, что домов второго типа должно быть построено не менее 10.

11. Торговое предприятие реализует 2 группы товаров А и В. Нормы затрат ресурсов на каждый тип товаров, лимиты ресурсов, а также доход на единицу каждой продукции заданы в таблице. Определить плановый объем продаж и структуру товарооборота так, что бы доход торгового предприятия был максимален.

Виды ресурсов	Норма затрат ресурсов на ед. товара		Лимит ресурсов.
	Товары группы А	Товары группы В	
Рабочее время продавцов, чел.-час	0,2	3	24
Площадь торговых залов, $м^2$	0,5	0,1	5
Площадь складских помещений, $м^2$	3	1	32
Накладные расходы, руб.	5	4	75
Доход на ед. продукции, руб.	4	3	

4. МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА (М-МЕТОД)

Пусть система ограничений ЗЛП имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \text{ , } b_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}) \text{ .}$$

Введем дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0 \quad (i = \overline{1,m})$ и перейдем к каноническому виду:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \text{ , } b_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}) \text{ .}$$

Система ограничений, вообще говоря, не имеет предпочтительного вида. Для решения ЗЛП с ограничениями, которые не имеют предпочтительного вида, применяют метод искусственного базиса (*М*-метод).

Введем искусственный базис путем перехода к *M*-задаче:

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - (+) M \sum_{i=1}^{m} w_i \to \max(\min);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j - x_{n+i} + w_i = b_i \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \quad w_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}),$$

где в целевой функции знак «–» относится к задаче максимизации, а знак «+» к задаче на минимизацию, M – сколь угодно большое положительное число.

В системе $\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j - x_{n+i} + w_i = b_i \quad (i = \overline{1,m})$ переменные $w_i \quad (i = \overline{1,m})$ образуют базис, называемый *искусственным*. При $x_1 = \ldots = x_n = 0$ из $\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j - x_{n+i} + w_i = b_i$ получаем начальный опорный план $\bar{x}_0 = (\underbrace{0;0;\ldots,0}_{n+m};b_1;b_2;\ldots;b_m)$ *M*-задачи. Заметим, что если $(x_1^0;\ldots;x_n^0;0;\ldots;0)$ – некоторый план *M*-задачи, то $(x_1^0;\ldots;x_n^0)$ – план исходной задачи, и $\bar{f}(x_1^0;\ldots;x_n^0;0;\ldots;0) = f(x_1^0;\ldots;x_n^0)$.

Получение оптимального опорного плана исходной задачи основано на следующих утверждениях.

Теорема 1. Если в оптимальном плане *M*-задачи все искусственные равны нулю $(x_1^*;\ldots;x_n^*;0;\ldots;0)$, то план $(x_1^*;\ldots;x_n^*)$ является оптимальным для исходной задачи.

Теорема 2. Если в оптимальном плане *M*-задачи, по крайней мере, одна из искусственных переменных положительна при любом большом M, то исходная задача не имеет ни одного плана.

Теорема 3. Если *M*-задача неразрешима, то и исходная задача неразрешима.

Замечание. **П**ри решении ЗЛП методом искусственного базиса искусственные переменные следует вводить лишь в те уравнения, которые не разрешены относительно «естественных» базисных переменных.

Выражение для функции $\bar{f}$ состоит из двух слагаемых: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = f$ и $M \sum_{i=1}^{m} w_i$, поэтому в симплекс-таблицах для $\bar{f}$ лучше отводить две строки: одну для f, другую для $M \sum_{i=1}^{m} w_i$.

Признак оптимальности проверяется сначала по второй строке, отвечающей сумме $M \sum_{i=1}^{m} w_i$. Лишь после того, как все элементы этой строки станут равными нулю, признак оптимальности проверяется по первой строке, отвечающей функции $f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

По мере исключения из базиса искусственных переменных соответствующие им столбцы элементов можно опускать. Объясняется это тем, искусственные переменные в базис не возвращаются.

Пример 1. Занести условие задачи в симплексную таблицу и записать начальный опорный план:

$$f = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3, \end{array}\right\}$$
$$x_j \ge 0\,(j = \overline{1,3}).$$

Решение. Приводим задачу к каноническому виду, а затем к *M*-задаче:

$$\bar{f} = 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 - Mw_1 - Mw_2 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + x_2 - x_5 + w_1 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 - x_6 + w_2 = 3, \end{array}\right\}$$
$$x_j \ge 0\,(j = \overline{1,6}),\ w_i \ge 0\,(i = 1,2).$$

Теперь *M*-задача имеет предпочтительный вид. Занесем ее условие в симплекс-таблицу. Индексную строку разбиваем на две. В первой записываются свободные члены выражений $\Delta_0 = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_0$ и $\Delta_j = \overline{C}_Б \cdot \overline{A}_j - c_j$, а во второй – слагаемые, содержащие M.

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	w_1	w_2
			9	6	–3	0	0	0	$-M$	$-M$
x_3	–3	4	–1	1	1	0	0	0	0	0
x_4	0	10	1	1	0	1	0	0	0	0
w_1	$-M$	9	3	1	0	0	–1	0	1	0
w_2	$-M$	3	–1	3	0	0	0	–1	0	1
$\bar{f}_j - c_j$		–12	–6	–9	0	0	0	0	0	0
		$-12M$	$-2M$	$-4M$	0	0	M	M	0	0

Начальный опорный план имеет вид:

$$\bar{x}_0 = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; w_1; w_2) = (0;0;4;10;0;0;9;3).$$
$$\bar{f}(\bar{x}_0) = -12 - 12M.$$

Пример 2. Решить методом искусственного базиса следующую задачу:

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_3 \le 5, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 3, \end{array}\right\}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Решение. Сначала приведем задачу к канонической форме, введя балансовые переменные $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$. Будем иметь:

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 &= 3, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Полученная задача эквивалентна исходной задаче, но отсутствует исходный допустимый базис. Во втором уравнении, впрочем, имеется базисная переменная x_4, которую можно ввести в базис.

Для первого и третьего уравнений введем искусственные переменные $w_1 \ge 0$, $w_2 \ge 0$. В результате получим *M*-задачу:

$$\bar{f} - f + M(w_1 + w_2) = -2x_1 + x_2 - x_3 + Mw_1 + Mw_2 \to \min;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + w_1 &= 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 + w_2 &= 3, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0,\ w_1 \ge 0,\ w_2 \ge 0.$$

Заполняем первую симплекс-таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2
			–2	1	–1	0	0	M	M
w_1	M	4	2	1	1	0	0	1	0
x_4	0	5	1	0	–2	1	0	0	0
w_2	M	3	2	2	0	0	–1	0	1
$\bar{f}_j - c_j$		0	2	–1	1	0	0	0	0
		$7M$	$4M$	$3M$	M	0	$-M$	0	0

В последней строке (при достаточно большом M) имеются сразу три положительных числа: $4M$, $3M$, M. Выбираем первое из них.

Разрешающий элемент находится в столбце x_1 и строке w_2. Производим преобразования, в результате которых искусственное неизвестное w_2 выходит из базиса, уступая в нем место неизвестному x_1.

Получим следующую таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2
			–2	1	–1	0	0	M	M
w_1	M	1	0	–1	1	0	1	1	–1
x_4	0	$\frac{7}{2}$	0	–1	–2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
x_1	–2	$\frac{3}{2}$	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\bar{f}_j - c_j$		–3	0	–3	1	0	1	0	–1
		M	0	$-M$	M	0	M	0	$-2M$

Во второй таблице выбираем столбец с x_3, поскольку стоящее в нем число M положительно.

Разрешающий элемент находится в столбце x_3 и строке w_1. Производим преобразования, в результате которых искусственное неизвестное w_1 выходит из базиса, уступая в нем место неизвестному x_3.

В результате получим следующую таблицу:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	w_1	w_2
			–2	1	–1	0	0	M	M
x_3	–1	1	0	–1	1	0	1	1	–1
x_4	0	$\frac{11}{2}$	0	–3	0	1	$\frac{5}{2}$	2	$-\frac{5}{2}$
x_1	–2	$\frac{3}{2}$	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\bar{f}_j - c_j$		–4	0	–2	0	0	0	–1	0
		0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$

В строке для целевой функции уже нет положительных чисел, что свидетельствует о достижении оптимального решения *M*-задачи. При этом искусственные неизвестные в базис не входят.

Последнюю таблицу без столбцов w_1 и w_2 можно рассматривать как симплекс-таблицу для задачи

$$f = -2x_1 + x_2 - x_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4,\\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 5,\\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 &= 3, \end{aligned}\right\}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0,$$

причем в ней содержится оптимальное решение этой задачи:

$$\bar{x}_{опт} = \left(\frac{3}{2}; 0; 1; \frac{11}{2}; 0\right), \quad f_{\min} = -4.$$

Так как нас интересует непосредственно лишь значения неизвестных x_1, x_2, x_3, то ответ запишется в виде:

$$\bar{x}_{опт} = \left(\frac{3}{2}; 0; 1\right), \quad f_{\min} = -4.$$

Как отмечалось в предыдущем параграфе, используются и другие формы симплексных таблиц.

Пример 3. Решить методом искусственного базиса задачу

$$f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 15,\\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 20,\\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0 \ \ (j = 1,\ldots,4).$$

Решение. Составим *M*-задачу. В первое и второе уравнения введем искусственные переменные x_5 и x_6. Третье уравнение разрешено относительно

«естественной» базисной переменной x_4. Вводить в него искусственную переменную нет смысла.

M-задача будет иметь вид:

$$\bar{f} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - M(x_5 + x_6) \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 &= 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 &= 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,\ldots,6).$$

Прежде чем составлять первую симплекс-таблицу, выражаем функцию $\bar{f}$ через свободные переменные:

$$\bar{f} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3 - 10 - M(15 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 20 - 2x_1 - x_2 - 5x_3) =$$
$$= 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 10 - M(-3x_1 - 3x_2 - 8x_3 + 35).$$

Теперь *M*-задачу можно записать в таблицу:

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_1	x_2	x_3
x_5	15	1	2	3
x_6	20	2	1	5
x_4	10	1	2	1
$\bar{f}$	–10	–2	–4	–4
	$-35M$	$-3M$	$-3M$	$-8M$

Разрешающий элемент можно выбирать только по элементам второй строки целевой функции. Лишь, после того как все элементы этой строки станут равными нулю, разрешающие столбцы выбирают по первой строке.

Разрешающий столбец выбран по элементу $-8M$ второй строки целевой функции. По минимальному симплексному отношению в столбце с элементом $-8M$ во второй строке целевой функции выбран разрешающий элемент 5.

После симплексного преобразования из базиса выводится искусственная переменная x_6 и исключается из дальнейших расчетов, соответствующий ей столбец опускается.

БП	СЧ	Свободные переменные	
		x_1	x_2
x_5	3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$
x_3	4	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_4	6	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$
$\bar{f}$	6	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{16}{5}$
	$-3M$	$\frac{1}{5}M$	$-\frac{7}{5}M$

Преобразовав вторую таблицу с разрешающим вторым столбцом и первой строкой, выводим из базиса и вторую искусственную переменную x_5.

При этом элементы второй строки целевой функции становятся равными нулю и полученная таблица соответствует исходной задаче. В ней содержится опорный план исходной задачи $\left(0;\frac{15}{7};\frac{25}{7};\frac{15}{7}\right)$, а также значение целевой функции $f=\frac{90}{7}$.

БП	СЧ	Свободные переменные
		x_1
x_2	$\frac{15}{7}$	$-\frac{1}{7}$
x_3	$\frac{25}{7}$	$\frac{3}{7}$
x_4	$\frac{15}{7}$	$\frac{6}{7}$
f	$\frac{90}{7}$	$-\frac{6}{7}$

Как видим из f-строки, план $\left(0;\frac{15}{7};\frac{25}{7};\frac{15}{7}\right)$ не оптимален, поэтому выполним еще одно симплексное преобразование:

БП	СЧ	Свободные переменные
		x_4
x_2	$\frac{5}{2}$	
x_3	$\frac{5}{2}$	
x_1	$\frac{5}{2}$	
f	15	1

Так как в f-строке последней таблицы нет отрицательных элементов, следовательно, содержащийся в ней опорный план является оптимальным.

Таким образом, $\bar{x}_{опт}=\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$, $f_{\max}=15$.

Упражнения

Задачи 1 – 5 решить методом искусственного базиса.

1. $f=-2x_1-6x_2+5x_3-x_4-4x_5\to\max$;

$$\left.\begin{aligned} &x_1-4x_2+2x_3-5x_4+9x_5=3,\\ &x_2-3x_3+4x_4-5x_5=6,\\ &x_2-x_3+x_4-x_5=1, \end{aligned}\right\}$$

$x_j\ge 0\,(j=\overline{1,5})$.

2. $f = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min$;

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 + 6x_6 &= 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 + 2x_6 &= 6, \end{aligned}\right\}$$

$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,6})$.

3. $f = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max$;

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 &= 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \end{aligned}\right\}$$

$x_j \geq 0 \; (j = \overline{1,4})$.

4. $f = 2x_1 + x_2 \to \min$;

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 6, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 12, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

5. На месторождениях *А* и *Б* добывается сырье для двух заводов, расположенных в разных пунктах. Себестоимость добычи единицы сырья на месторождении *А* и доставки его на оба завода одинакова и равна 200 ден. ед., себестоимость добычи и доставки сырья месторождения *Б* составляет 300 ден. ед. для завода № 1 и 400 ден. ед. для завода № 2. При перевозке сырья с месторождения *А* к любому заводу и при перевозке с месторождения Б на завод № 2 приходится использовать участок железнодорожной сети с ограниченной способностью: количество перевозимого через этот участок сырья не должно превышать за планируемый период (например, за год) 150 ед. Для обеспечения добычи сырья на месторождении *А* требуется 2 тыс. ден. ед. капиталовложений на каждую единицу сырья; удельные капиталовложения на единицу сырья на месторождении *Б* составляют 3 тыс. ден. ед. Общая сумма капиталовложений в организацию добычи сырья не должна превышать 600 тыс. ден. ед. Завод № 1 изготавливает 400 ед. продукции за планируемый период, завод № 2 – 500. При этом из единицы сырья с месторождения *А* можно изготовить 3 ед. продукции как на заводе № 1. так и на заводе № 2. Качество сырья с месторождения *Б* несколько выше: из единицы этого сырья можно изготовить 4 ед. продукции на заводе № 1 или 5 ед. – на заводе № 2. Требуется определить, сколько сырья следует добывать на каждом месторождении для каждого завода, чтобы полностью обеспечить их потребности и свести при этом к минимуму сумму издержек на добычу и доставку сырья.

6. Решить симплекс-методом.

Для грузовых перевозок создается автоколонна. На приобретение автомашин выделено 600 тыс. ден. ед. Можно заказать машины трех марок – $А, Б$ и $В$, характеризующиеся данными, приведенными в следующей таблице:

Марка автомашины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Количество водителей, обслуживающих машину за смену	Число рабочих смен в сутки	Производительность машины за смену, т/км
$А$	10	1	3	2100
$Б$	20	2	3	3600
$В$	23	2	3	3780

Количество машин не должно превышать 30, а общее число водителей в автоколонне должно быть не более 144 человек. Сколько автомашин каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимально возможную производительность (т/км) в расчете на одни сутки? Считать, что каждая машина будет использоваться в течение трех смен, а водители будут работать по одной смене в сутки.

5. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

1. Понятие двойственности

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую ЗЛП, называемую двойственной по отношению к исходной (прямой) задаче. Пара симметричных двойственных задач имеет следующий вид:

Прямая задача.

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max . \qquad (44)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \ i=\overline{1,m}, \qquad (45)$$

$$x_j \ge 0, \ \ j=\overline{1,n}, \qquad (46)$$

Двойственная задача

$$\hat{O}(Y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min . \qquad (47)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \ge c_j, \ \ j=\overline{1,n}, \qquad (48)$$

$$y_i \ge 0, \ \ i=\overline{1,m}. \qquad (49)$$

Переменные y_i $(i=\overline{1,m})$ двойственной задачи называются двойственными переменными или оценками, а также учетными (неявными, теневыми) ценами.

Прямая и двойственная задачи образуют пару взаимно двойственных задач линейного программирования.

2. Правила составления двойственной задачи:

Исходная задача должна быть преобразована следующим образом:

1) если в исходной задаче требуется найти максимум целевой функции, то ограничения должны иметь знак $\leq$, если же в исходной задаче нужно найти минимум, то ограничения должны иметь знак $\geq$;

2) каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие двойственная переменная y_i, $i=\overline{1,m}$; каждому ограничению двойственной задачи соответствует переменная исходной задачи (число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной, а число ограничений двойственной – числу переменных прямой задачи);

3) если в исходной задаче требуется найти максимум целевой функции (и ее система ограничений имеет знаки $\leq$), то в двойственной задаче – минимум (и ее система ограничений должна иметь знаки $\geq$), и наоборот;

4) коэффициенты c_j целевой функции прямой задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи;

5) свободные члены b_i системы ограничений прямой задачи являются коэффициентами целевой функции двойственной задачи;

6) матрицы коэффициентов ограничений прямой и двойственной задачи являются транспонированными по отношению друг к другу;

7) все переменные в обеих задачах неотрицательны.

Пример 1. Построить задачу, двойственную к задаче линейного программирования, заданной в симметричной форме записи:

$$f = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ 2x_2 + x_3 \leq 6, \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Решение. Двойственная задача будет иметь две переменные y_1 и y_2, так как исходная задача содержит два ограничения. Используя общее правило записи двойственной задачи, получим:

$$\varphi = 10y_1 + 6y_2 \to \min;$$

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 \geq 3, \\ y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ 3y_1 + y_2 \geq 1, \end{aligned}\right\}$$

$y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$.

Пример 2. Построить задачу, двойственную к задаче линейного программирования, заданной в произвольной несимметричной форме:

$$f = -11x_1 + 9x_2 - 14x_3 - 10x_4 \to \max;$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - 4x_2 + x_4 \geq 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_4 \geq -1, \\ -x_1 + 3x_3 + 2x_4 \geq 3, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -4, \end{array}\right\}$$

$x_1 \geq 0$, $y_4 \geq 0$, x_2, x_3 – любого знака.

Решение. Сначала ограничения-неравенства вида $\geq$ умножением на число -1 сведем к ограничениям-неравенствам вида $\leq$. Получим:

$$f = -11x_1 + 9x_2 - 14x_3 - 10x_4 \to \max;$$

$$\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 4x_2 - x_4 \leq -4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ -4x_1 + 5x_2 - 2x_4 \leq 1, \\ x_1 - 3x_3 - 2x_4 \leq -3, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 = -4, \end{array}\right\}$$

$x_1 \geq 0$, $y_4 \geq 0$, x_2, x_3 – любого знака.

Двойственная задача имеет пять переменных y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, так как прямая задача содержит пять ограничений.

В соответствии с указанными выше правилами запишем двойственную задачу:

$$\varphi = -4y_1 + 5y_2 + y_3 - 3y_4 - 4y_5 \to \min;$$

$$\left.\begin{array}{l} -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 + y_4 - 2y_5 \geq -11, \\ 4y_1 + y_2 + 5y_3 + y_5 = 9, \\ 2y_2 - 3y_4 = -14, \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 2y_4 - 3y_5 \geq -10, \end{array}\right\}$$

$y_1 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, $y_4 \geq 0$, y_2, y_3 – произвольного знака.

Пример 3. Составить двойственную задачу к задаче

$$F(X) = 9x_1 + 7x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 470, \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 1600, \\ -7x_1 - 2x_2 \geq -2060, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решение. Так как исходная задача решается на максимум, то все ограничения должны иметь знак $\leq$. Умножим обе части третьего неравенства системы ограничений $-7x_1 - 2x_2 \geq -2060$ на -1 и получим неравенство $7x_1 + 2x_2 \leq 2060$. Таким образом, исходной задачей является задача с системой ограничений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 470, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 1600, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 2060. \end{cases}$$

Каждому ограничению исходной задачи ставим в соответствие переменную y_i, $i = \overline{1,3}$.

Так как в исходной задаче требовалось найти максимум, то в двойственной задаче нужно искать минимум.

Коэффициентами целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы ограничений исходной задачи:

$$\Phi(Y) = 470y_1 + 1600y_2 + 2060y_3 \to \min$$

Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции исходной задачи.

Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается путем транспонирования матрицы коэффициентов системы ограничений исходной задачи. Таким образом, система ограничений имеет вид

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 7y_3 \ge 9, \\ 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 7, \end{cases}$$

где знак $\ge$ выбран в силу того, что двойственная задача является задачей на минимум.

Все переменные двойственной задачи неотрицательны.

Таким образом, двойственная задача имеет вид

$$\Phi(Y) = 470y_1 + 1600y_2 + 2060y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 7y_3 \ge 9, \\ 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 7, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Двойственные симметричные задачи имеют важный экономический смысл. Рассмотрим пример задачи оптимального использования отходов сырья основного производства.

Пусть на предприятии имеются отходы сырья m видов в объемах b_i единиц $(i = \overline{1,m})$. Из этих отходов можно наладить выпуск n видов дополнительной продукции. Обозначим через a_{ij} норму расхода сырья i-го вида на единицу j-й продукции $(j = \overline{1,n})$, через c_j – цену реализации единицы j-й продукции. Неизвестные величины задачи: x_j – объемы выпуска j-й продукции, обеспечивающие предприятию максимум выручки.

Математическая модель задачи имеет вид (44) - (46).

Предположим, что у этого предприятия есть и альтернатива: продать отходы основного производства некоторой другой организации. Необходимо установить прикидочные оценки (цены) на эти отходы. Обозначим их $y_1, y_2, ..., y_m$. Оценки должны быть установлены исходя из следующих требований, отражающих несовпадающие интересы продавца и покупателя:

1) покупатель стремится минимизировать общую стоимость отходов сырья;

2) продавец согласен уступить отходы только по таким ценам, которые обеспечат получение выручки не меньшей, чем выручка, которая была бы получена в результате организации собственного производства.

Эти требования приводят к следующей ЗЛП.

Требование покупателя – минимизация стоимости покупки:

$$\Phi(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

Требование продавца можно сформулировать в виде системы ограничений. Предприятие откажется от выпуска каждой единицы продукции первого вида, если

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1,$$

где левая часть означает выручку за сырье, идущее на производство единицы дополнительной продукции первого вида; правая – ее цену.

Аналогичные рассуждения можно провести в отношении выпуска продукции каждого вида. Кроме того, по смыслу задачи все оценки должны быть неотрицательными. Таким образом мы получили двойственную задачу (47) - (49).

3. Связь между решениями прямой и двойственной задачи. Теоремы двойственности

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач (44) - (46) и (47) - (49). Каждая из этих задач является отдельной ЗЛП и может быть решена независимо от другой. Однако между оптимальными планами этих задач существует связь, которая позволяет находить решение одной задачи, зная решение другой.

Теорема. Для любых допустимых планов $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ прямой и двойственной ЗЛП справедливо неравенство $F(X) \leq \Phi(Y)$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,. \qquad (50)$$

Теорема (критерий оптимальности Канторовича) Если для некоторых допустимых планов X^* и Y^* пары двойственных задач выполняется равенство

$$F(X^*) = \hat{O}\left(Y^*\right), \qquad (51)$$

то X^* – оптимальный план исходной задачи, а Y^* – оптимальный план двойственной задачи.

Экономическое содержание этой теоремы состоит в том, что план производства X и вектор оценок ресурсов Y являются оптимальными, если цена всей произведенной продукции и суммарная оценка ресурсов совпадают.

Теорема (первая теорема двойственности) Если одна из пары двойственных (44) - (46) или (47) - (49) имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е.

$$F(X^*) = \hat{O}\left(Y^*\right). \qquad (52)$$

Теорема (вторая теорема двойственности). Для того чтобы планы X^* и Y^* пары двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) &= 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i\right) &= 0, \quad i = \overline{1,m}, \end{aligned} \qquad (53)$$

Из второй теоремы двойственности следует, что двойственные оценки могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а ресурс избыточный (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.

Теорема. Двойственные оценки показывают приращение целевой функции, вызванное малым изменением свободного члена соответствующего ограничения задачи линейного программирования, точнее

$$\frac{\partial F(X^*)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad (i = \overline{1,m}). \qquad (54)$$

Из равенства (54) следует, что величина двойственной оценки численно равна изменению целевой функции при изменении соответствующего свободного члена ограничений на единицу.

Применение двойственности в линейном программировании позволяет расширить множество методов решения задач. Отметим, что симплекс-метод применим в тех случаях, когда в системе ограничений ЗЛП свободные члены b_j неотрицательны, в то время как коэффициенты целевой функции могут иметь любой знак. Однако в ряде случаев легче найти базис, в котором все $c_j \geq 0$, но не все $b_i \geq 0$. Вариант симплекс-метода, применяемый для решения таких задач. называется двойственным симплекс-методом.

Двойственный симплекс-метод применим для решения ЗЛП вида

$$F(X) = -\sum_{j=1}^{n} c'_j x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n},$$

где система ограниченны имеет предпочтительный вид и все коэффициенты целевой функции $c'_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$.

Пример 1. Построить двойственную задачу к задаче

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 \le 34, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \le 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 22, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3;4\ .$$

Найти оптимальный план двойственной задачи, используя соответствие между переменными прямой и двойственной задач.

Решение. Двойственная задача имеет вид:

$$\varphi = 34y_1 + 16y_2 + 22y_3 \to \min;$$

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 \ge 7, \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 3, \\ y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 4, \\ 5y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 2, \end{aligned}\right\}$$

$$y_i \ge 0,\ i = 1,2,3\ .$$

Из теорем двойственности следует, что если решена одна из пары двойственных задач, то одновременно найдено решение и другой задачи.

Прежде, чем решить прямую задачу симплекс-методом, приведем ее к каноническому виду, добавив к левым частям неравенств ограничений неотрицательные переменные x_5, x_6, x_7.

В канонической форме ЗЛП примет вид:

$$f = 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 34, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + x_6 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_7 = 22, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3;4;5;6;7\ .$$

При решении прямой задачи последняя симплекс-таблица выглядит так:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	2	0	0	0
x_5	0	$\frac{32}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{5}$
x_1	7	$\frac{13}{5}$	1	0	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	3	$\frac{28}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$f_j - c_j$		35	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

В индексной строке последней таблицы нет ни одного отрицательного элемента, следовательно, содержащийся в ней план является оптимальным.

Выпишем его. Опорный план $\overline{x^*} = \left(\frac{13}{5}, \frac{28}{5}, 0, 0, \frac{32}{5}, 0, 0\right)$ является оптимальным, а соответствующее значение $f\left(\overline{x^*}\right) = 35$ целевой функции будет максимальным.

В индексной строке этой таблицы содержатся компоненты y_i^* оптимального плана двойственной задачи. Выписать компоненты y_i^* поможет соответствие между переменными двойственных задач. Чтобы установить это соответствие, преобразуем ограничения-неравенства

$$\left.\begin{aligned} &2y_1+4y_2+2y_3\ge 7,\\ &4y_1+y_2+3y_3\ge 3,\\ &y_1+4y_2+y_3\ge 4,\\ &5y_1+y_2+2y_3\ge 2, \end{aligned}\right\}$$ в эквивалентные уравнения, вычитая из левых частей

дополнительные неотрицательные переменные y_4, y_5, y_6, y_7, равные разностям между левыми и правыми частями этих неравенств.

Тогда двойственная задача запишется в виде:

$$\varphi = 34y_1+16y_2+22y_3 \to \min;$$

$$\left.\begin{aligned} &2y_1+4y_2+2y_3-y_4\ge 7,\\ &4y_1+y_2+3y_3-y_5\ge 3,\\ &y_1+4y_2+y_3-y_6\ge 4,\\ &5y_1+y_2+2y_3-y_7\ge 2, \end{aligned}\right\}$$

$$y_i\ge 0,\ i=1,2,3,4,5,6,7.$$

В этой записи переменные y_4, y_5, y_6 и y_7 являются базисными, а y_1, y_2, y_3 – свободными. В исходной задаче переменные x_1, x_2, x_3, x_4 являются свободными, а x_5, x_6, x_7 – базисными.

Соответствие, о котором шла речь выше, устанавливается путем сопоставления базисным переменным одной задачи свободных переменных двойственной задачи, и наоборот, т.е.

$$\overbrace{\begin{matrix} x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \underbrace{y_1 & y_2 & y_3}_{СП} \end{matrix}}^{БП} \qquad \overbrace{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \underbrace{y_4 & y_5 & y_6 & y_7}_{БП} \end{matrix}}^{СП}$$

Воспользуемся этим соответствием и перепишем симплекс-таблицу следующим образом:

БП	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			7	3	4	2	0	0	0
x_5	0	$\frac{32}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{7}{5}$
x_1	7	$\frac{13}{5}$	1	0	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	3	$\frac{28}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$f_j - c_j$		35	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
			y_4	y_5	y_6	y_7	y_1	y_2	y_3

Из этой таблицы получаем оптимальный план $\overline{y^*}$ двойственной задачи: $y_1^*=0$, $y_2^*=\frac{3}{2}$, $y_3^*=\frac{1}{2}$, $y_4^*=0$, $y_5^*=0$, $y_6^*=\frac{5}{2}$, $y_7^*=\frac{1}{2}$., т.е. $\overline{y^*}=\left(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2};0;0;\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Из теорем двойственности следует, что экстремальные значения целевых функций разрешимых двойственных задач совпадают, поэтому

$$\varphi_{\min}=f_{\max}=35.$$

Пример 2. Дана следующая ЗЛП:

$$f=3x_1+3x_2+4x_3\to\min;$$
$$\left.\begin{array}{l}4x_1+x_2-x_3\geq 1,\\ 4x_1+2x_2-3x_3\geq 3,\end{array}\right\}$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0.$$

Найти решение задачи через решение двойственной задачи к ней.

Решение. По правилам построения двойственной задачи получаем, что двойственная задача к исходной задаче имеет следующий вид:

$$\varphi=y_1+3y_2\to\max;$$
$$\left.\begin{array}{l}4y_1+4y_2\leq 3,\\ y_1+2y_2\leq 3,\\ -y_1-3y_2\leq 4,\end{array}\right\}$$
$$y_1\geq 0,\ y_2\geq 0.$$

Введя неотрицательные переменные y_3, y_4, y_5, приведем двойственную задачу к каноническому виду:

$$\varphi=y_1+3y_2\to\max;$$
$$\left.\begin{array}{l}4y_1+4y_2+y_3=3,\\ y_1+2y_2+y_4=3,\\ -y_1-3y_2+y_5=4,\end{array}\right\}$$
$$y_i\geq 0,\ (i=\overline{1,5}).$$

Построим симплекс-таблицу полученной канонической задачи:

БП	СЧ	Свободные переменные	
		y_1	y_2
y_3	3	4	4
y_4	3	1	2
y_5	4	–1	–3
φ	0	–1	–3

Первый столбец (БП) – столбец базисных переменных; второй столбец (СЧ) – столбец свободных членов ограничений; в первой строке – свободные переменные y_1, y_2; в последней (φ-строке) – коэффициенты целевой функции с противоположными знаками.

В столбце свободных членов нет отрицательных элементов, план – допустимый. В φ-строке есть отрицательные элементы, значит, план не оптимальный.

В качестве разрешающего столбца выбираем четвертый (с наибольшим по модулю отрицательным элементом). Находим наименьшее положительное отношение элементов столбца свободных членов к соответствующим элементам разрешающего столбца:

$$\min\left\{\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right\}=\frac{3}{4}.$$

Следовательно, разрешающей будет вторая строка.

Для улучшения плана необходимо выполнить жорданову перестановку пары (y_3, y_2) с разрешающим элементом 4.

В результате получим следующую симплекс-таблицу:

БП	СЧ	Свободные переменные	
		y_1	y_3
y_2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$
y_4	$\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
y_5	$\frac{25}{4}$	2	$\frac{3}{4}$
φ	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{3}{4}$

В φ-строке нет отрицательных элементов. Следовательно, получен оптимальный план $\overline{y^*}=\left(0;\frac{3}{4};0;\frac{3}{2};\frac{25}{4}\right)$. $\varphi_{\max}=\varphi\left(0;\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{4}$.

Поскольку исследуемая двойственная задача имеет оптимальный план и $\varphi_{\max}=\frac{9}{4}$, то, согласно первой теореме двойственности, и исходная к ней задача обладает оптимальным планом и $f_{\min}=\frac{9}{4}$

Пример 3. На предприятии имеется четыре вида сырья в количествах: вида A – 18 единиц; вида B – 16; вида C – 8 и вида D – 6 единиц. Нормы затрат каждого вида сырья на единицу продукции вида № 1 составляют соответственно 1; 2; 1; 0; вида № 2 – соответственно 2; 1; 1;1 и № 3 – соответственно 1; 1; 0; 1. Прибыль от реализации одной единицы продукции № 1 равна 3 руб., № 2 – 4 руб., № 3 – 2 руб. Составить план производства трех видов продукции, при котором доход предприятия от реализации всей продукции был бы максимальным. Найти двойственные оценки и сделать анализ решения.

Решение. Обозначим количество выпускаемых изделий вида № 1 через x_1, изделий вида № 2 через x_2 и изделий вида № 3 через x_3.

Экономико-математическая модель задачи имеет вид:

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 18,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 16,\\ x_1 + x_2 &\le 8,\\ x_2 + x_3 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1;2;3.$$

Оценки двойственной задачи обозначим через y_i $(i = 1,...,4)$, y_1 – оценка 1 единицы сырья A, $y_2 - B$, $y_3 - C$, $y_4 - D$.

Экономико-математическая модель двойственной задачи примет вид:

$$\varphi = 18y_1 + 16y_2 + 8y_3 + 6y_4 \to \min;$$
$$\left.\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 &\ge 3,\\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &\ge 4,\\ y_1 + y_2 + y_4 &\ge 2, \end{aligned}\right\}$$
$$y_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4.$$

Решим исходную задачу симплексным методом. Введя неотрицательные переменные x_4, x_5, x_6, x_7, приведем задачу к каноническому виду:

$$f = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\le 18,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &\le 16,\\ x_1 + x_2 + x_6 &\le 8,\\ x_2 + x_3 + x_7 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}.$$

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_1	x_2	x_3
x_4	18	1	2	1
x_5	16	2	1	1
x_6	8	1	1	0
x_7	6	0	1	1
f	0	–3	–4	–2

После первого шага симплексных преобразований будем иметь:

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_1	x_7	x_3
x_4	6	1	–2	–1
x_5	10	2	–1	0
x_6	2	1	–1	–1
x_2	6	0	1	1
f	24	–3	4	2

После второго шага симплексных преобразований получим:

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_6	x_7	x_3
x_4	4	–1	–1	0
x_5	6	–2	1	2
x_1	2	1	–1	–1
x_2	6	0	1	1
f	30	3	1	–1

После третьего шага симплексных преобразований будем иметь:

БП	СЧ	Свободные переменные		
		x_6	x_7	x_5
x_4	4	–1	–1	0
x_3	3	–1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	3	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
f	33	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

Оптимальный план исходной задачи имеет вид:

$$\overline{x^*} = (x_1^*; x_2^*; x_3^*; x_4^*; x_5^*; x_6^*; x_7^*) = (5;3;3;4;0;0;0).$$

Значение целевой функции для этого плана $f_{\max} = 33$.

С учетом соответствия между переменными пары взаимно двойственных задач запишем значения двойственных оценок:

$$y_1^* = 0,\ y_2^* = \frac{1}{2},\ y_3^* = 2,\ y_4^* = \frac{3}{2}.$$

Оценка для сырья вида A рана нулю, так как сырье этого вида в оптимальном плане используется не полностью. Для сырья остальных видов оценки положительны, что указывает на полное использование сырья видов B, C, D.

Полученные значения оценок удовлетворяют всем условиям двойственной задачи.

$$\varphi_{\min} = 18 \cdot 0 + 16 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot 2 + 6 \cdot \frac{3}{2} = 33.$$

Система ограничений при подстановке оптимальных значений оценок выполняется:

$$\left.\begin{array}{l} 0+2\cdot\dfrac{1}{2}+2=3, \\ 2\cdot 0+\dfrac{1}{2}+2+\dfrac{3}{2}=4, \\ 0+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=2. \end{array}\right\}$$

Очевидно, ограничения двойственной задачи выполняются как строгие равенства. Проведем анализ решения с учетом двойственных оценок.

Увеличение объема сырья B на одну единицу позволило бы получить оптимальный план, для которого доход увеличился бы на 0,5 руб., а увеличение объема сырья C на одну единицу дало бы увеличение дохода на 2 руб.

Аналогично при увеличении объема сырья D на одну единицу доход увеличится на 1,5 руб. Понятна и нулевая оценка, полученная для сырья A: $y_1^* = 0$. Поскольку сырье A не полностью используется, то дальнейшее увеличение объема этого вида сырья не повлияет на оптимальный план производства и на сумму дохода.

По оценкам можно судить о дефицитности ресурсов или сырья. Самые высокие значения оценок указывают на более дефицитные виды сырья.

В нашем случае наиболее дефицитным сырьем является сырье вида C, для которого двойственная оценка $y_3^* = 2$.

Менее дефицитным является сырье вида B, для которого оценка $y_2^* = \dfrac{1}{2}$. Совсем недефицитным (избыточным) является сырье вида A, для которого оценка $y_1^* = 0$.

Упражнения

Построить двойственные задачи к следующим задачам линейного программирования.

1. $f = 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \min$;

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 8, \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

2. $f = 5x_1 + 3x_2 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 4x_1 + x_2 \le 4, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

3. $f = 3x_1 + 11x_2 - x_3 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 3, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

4. $f = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} 3x_2 - +5x_3 \le 4, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = -3, \\ 4x_1 - x_3 \ge 2, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

5. $f = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 5x_5 \to \min$;

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 - 3x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \le 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 - 6x_5 \ge -2, \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \ge -3, \end{array}\right\}$$

$x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

6. $f = 7x_1 - 5x_2 - 5x_3 \to \max$;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 \le -3, \\ 6x_1 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 \ge 1, \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0$.

7. На кондитерской фабрике ассортимент выпускаемой карамели разделен на три однородные группы, условно обозначенные K_1, K_2 и K_3. Расход основного сырья и его запас указаны в следующей таблице:

Виды основного сырья	Расход сырья на 1 т			Общий запас сырья
	K_1	K_2	K_3	
I (сахарный песок)	0,7	0,7	0,7	700
II (патока)	0,3	0,3	0,2	300
III (фруктовое пюре)	0	0,2	0,3	150
Уровень прибыли	100	110	120	

Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах не учитываются. В качестве критерия оптимальности плана принять максимум прибыли. Составить математические модели прямой задачи и двойственной ей задачи.

8. Решить ЗЛП

$$f = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 10, \\ 2x_2 + x_3 \le 6, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

и записать оптимальное решение двойственной задачи.

9. Решить ЗЛП

$$f = 4x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

и, используя принцип соответствия между переменными, найти решение двойственной задачи.

10. Решить задачу линейного программирования

$$f = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \ge 4, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$$

через решение двойственной задачи к ней.

Решить ЗЛП 11 – 14 через решение двойственных задач к ним.

11. $f = 4x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$
$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 6, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

12. $f = 3x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 2, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

13. $f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \min;$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 2, \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 8, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

14. $f = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min;$
$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 3, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

15. Для приведенных ниже задач записать двойственную задачу. Решить одну из них симплексным методом и получить решение другой:

а) $f = 7x_1 + 13x_2 + 8x_3 \to \max$;

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 3, \\ x_1 + x_3 &\le 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 2, \end{aligned}\right\}$$

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3})$;

б) $f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max$;

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\ge 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge 11, \end{aligned}\right\}$$

$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3})$.

16. Предприятие имеет возможность производить продукцию четырех видов $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$. При ее изготовлении используются ресурсы P_1, P_2, P_3, размеры допустимых затрат которых ограничены соответственно величинами 1000, 500, 1200 ед. Имеется матрица норм расхода ресурсов $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, в которой элемент a_{ik}, стоящий на пересечении i-ой строки и k-го столбца, равен количеству ресурса P_i, расходуемого на единицу продукции $П_k$.

Цена единицы продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ и $П_4$ соответственно равна 2, 40, 10, 15 денежных единиц.

Составить математическую модель задачи, позволяющую найти план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль; построить двойственную задачу. Дать экономическую трактовку всех величин, присутствующих в оптимальных планах исходной и двойственной задач.

17. Предприятие имеет возможность производить продукцию трех видов $П_1$, $П_2$ и $П_3$. При ее изготовлении используются ресурсы P_1, P_2, P_3, размеры допустимых затрат которых ограничены соответственно величинами 500, 550, 200 ед. Имеется матрица норм расхода ресурсов $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, в которой элемент a_{ik}, стоящий на пересечении i-ой строки и k-го столбца, равен количеству ресурса P_i, расходуемого на единицу продукции $П_k$.

Цена единицы продукции $П_1$, $П_2$ и $П_3$ соответственно равна 3, 4, 1 денежных единиц.

Составить математическую модель задачи, позволяющую найти план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль; построить двойственную задачу. Дать экономическую трактовку всех

величин, присутствующих в оптимальных планах исходной и двойственной задач.

6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

1. Постановка транспортной задачи по критерию стоимости

Пусть имеется m пунктов отправления (поставщиков) A_1, A_2,…, A_m, у которых находятся запасы некоторого однородного груза в количестве соответственно $a_1, ..., a_m$ единиц. Этот груз необходимо доставить в пункты назначения (потребителям) $B_1, ..., B_n$, спрос (потребности) которых выражается величинами $b_1, ..., b_n$ единиц. Стоимость (тариф) перевозки единицы груза из i-го пункта отправления $(i = \overline{1,m})$ в j-ый пункт назначения $(j = \overline{1,n})$ равна c_{ij}. Пусть x_{ij} – количество единиц груза, доставляемого из i-го пункта отправления A_i в j-ый пункт назначения B_j. Требуется составить такой план перевозок груза, который полностью удовлетворяет спрос потребителей и обеспечивает наименьшую стоимость суммарных транспортных издержек.

Математическая постановка транспортной задачи состоит в определении минимального значения функции

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (55)$$

при выполнении условий:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad (56)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad (57)$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad (58)$$

где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Экономический смысл условий (56)–(58) состоит в том, что спрос всех потребителей должен быть удовлетворен, весь груз, имеющийся у поставщиков, должен быть вывезен (обратные перевозки исключаются), размеры поставок должны выражаться неотрицательными числами.

Исходные данные транспортной задачи удобно записывать в виде матрицы или распределительной таблицы (таблица 1), строки которой соответствуют поставщикам (пунктам отправления), а столбцы – потребителям (пунктам потребления). В последнем столбце таблицы указывают запас груза каждого поставщика, а в последней строке – величину спроса потребителей. В клетках таблицы в выделенных правых верхних углах будем указывать тарифы, в левых нижних углах – объемы перевозок.

Таблица 1

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	… …	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	… …	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	… …	… …	… …	… …	
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	… …	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_n	

Пример 1. Составить математическую модель транспортной задачи, исходные данные которой приведены в таблице 2.

Таблица 2

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	23	14	20	34
A_2	12	21	25	15	35
A_3	15	25	21	17	58
Потребности	21	49	26	31	127

Целевая функция (55) в данном случае имеет вид

$$F = 18x_{11} + 23x_{12} + 14x_{13} + 20x_{14} + 12x_{21} + 21x_{22} +$$
$$+ 25x_{23} + 15x_{24} + 15x_{31} + 25x_{32} + 21x_{33} + 17x_{34}.$$

Ограничения (56) принимают вид

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 34, \\ x_{21} + x_{21} + x_{23} + x_{24} = 35, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 58, \end{cases}$$

а ограничения (57) принимают вид

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 21, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 49, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 26, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 31. \end{cases}$$

Выполнение этих условий означает, что все запасы поставщиков будут вывезены, а спрос потребителей будет полностью удовлетворен.

Матрица $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, в которой все элементы $x_{ij} \geq 0$, называется допустимым планом транспортной задачи. Допустимый план

$X = (x_{ij})$, при котором целевая функция (55) достигает минимального значения, называется оптимальным планом и обозначается $X^* = (x_{ij}^*)$.

Транспортная задача называется закрытой (с закрытой моделью), если суммарная потребность в грузе в пунктах назначения равна суммарному запасу груза в пунктах отправления, т.е. выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (59)$$

В противном случае транспортная задача называется открытой.

Рассмотренная в примере 1 задача является задачей с закрытой моделью.

Теорема. Для того, чтобы транспортная задача имела допустимые планы, необходимо и достаточно, чтобы она была транспортной задачей с закрытой моделью, т. е., чтобы выполнялось равенство (59).

Для нахождения оптимального плана транспортной задачи с открытой моделью осуществляется преобразование этой модели в закрытую модель. Такое преобразование осуществляется следующим образом:

если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. запасы груза превышают потребности, то вводят фиктивный пункт назначения B_{n+1} с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, при этом соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{i,n+1} = 0 \ \ (i = \overline{1,m})$;

если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. потребности превышают запасы, то вводят фиктивного поставщика A_{m+1} с запасом груза $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, при этом соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{m+1,j} = 0 \ \ (j = \overline{1,n})$.

Таким образом, нахождение оптимального плана задачи с открытой моделью сводится к нахождению оптимального плана задачи с закрытой моделью.

Если в допустимом плане транспортной задачи содержится не более $m+n-1$ ненулевых элементов x_{ij}, то такой план называется опорным или базисным планом транспортной задачи. При этом если число ненулевых элементов x_{ij} равно $m+n-1$, то такой опорный план называется невырожденным, а если это число меньше $m+n-1$, то опорный план называется вырожденным.

Теорема. Для того, чтобы транспортная задача имела допустимые планы, не более $m+n-1$ отличных от нуля неизвестных.

Транспортная задача может быть решена симплексным методом, однако в силу ее исключительно большой практической значимости и специфики ограничений для определения оптимального плана транспортной задачи разработаны специальные методы.

Решение транспортной задачи включает в себя:

1) построение начального опорного плана задачи;

2) проверку опорного плана на оптимальность;

3) последовательное улучшение плана в случае построения неоптимального плана.

2. Построение начального опорного плана

Существует несколько различных методов построения начального опорного плана транспортной задачи. Далее будут рассмотрены: метод северо-западного угла и метод минимального элемента. При построении начального опорного плана любым из этих методов осуществляется последовательное занесение некоторых значений в клетки распределительной таблицы (загрузка клеток). При этом в каждую загружаемую клетку должно заноситься наибольшее возможное значение поставки $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$. После занесения в клетку (i, j) числа x_{ij}, необходимо скорректировать соответствующие величины a_i и b_j, помещая вместо них числа $a'_i = a_i - x_{ij}$ и $b'_j = b_j - x_{ij}$ соответственно. Очевидно, что хотя бы одно из этих чисел окажется нулем. Таким образом, при каждой загрузке очередной клетки либо будет исчерпан весь запас груза поставщика, либо будет полностью удовлетворен спрос потребителя. Строка или столбец распределительной таблицы, в которых появляется нуль, далее исключаются из рассмотрения (закрываются). Далее вся процедура повторяется для следующей невычеркнутой клетки. Соблюдение этого требования обеспечит заполнение ровно $m+n-1$ клеток.

3. Метод северо-западного угла.

Загрузка клеток распределительной таблицы начинается с левого верхнего («северо-западного») угла, т.е. с клетки (1; 1). Если при этом закрывается строка, то следующей загружается клетка (2; 1); если закрывается столбец, то следующей загружается клетка (1; 2). Дальнейшая загрузка либо по строке вправо, либо по столбцу вниз. При этом в каждую клетку загружается максимально возможное для нее значение, не превосходящее скорректированные значения a_i и b_j.

Отметим, что метод северо-западного угла не учитывает значения тарифов c_{ij}, что часто приводит к начальному опорному плану, достаточно далекому от оптимального.

Пример 2. Методом северо-западного угла построить начальный опорный план для задачи, исходные данные которой приведены в таблице 2.

Сначала убедимся, что рассматриваемая задача является задачей с закрытой моделью. Для этого находим $\sum_{i=1}^{m} a_i$ и $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Так как $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 127$, то можем приступать к нахождению начального опорного плана.

Первой заполняем (загружаем) клетку (1,1). Так как $a_1 = 34$, а $b_1 = 21$, то $x_{11} = \min(a_1, b_1) = \min(34,21) = 21$. Загружаем в клетку (1,1) число 21 (см. таблицу 8.8). При этом спрос потребителя B_1 оказывается полностью удовлетворенным (закрываем первый столбец), а исходное значение запаса $a_1 = 34$ корректируем на 21, заменяя его на $a'_1 = a_1 - x_{11} = 34 - 21 = 13$.

Так как первый столбец закрыт, то перемещаемся вправо, в клетку (1,2). В эту клетку загружаем число $x_{12} = \min(a'_1, b_2) = \min(13,49) = 13$, Теперь запас поставщика A_1 исчерпан полностью, закрываем первую строку. Величину потребностей $b_2 = 49$ потребителя B_2 корректируем на $x_{12} = 13$, получаем $b'_2 = b_2 - x_{12} = 49 - 13 = 36$.

Смещаемся вниз, в клетку (2,2). Вычисляем число $x_{22} = \min(a_2, b'_2) = \min(35,36) = 36$ и помещаем его в клетку (2,2). При этом происходит исчерпание запасов поставщика A_2. Закрываем вторую строку и снова смещаемся вниз, в клетку (3,2). Величину спроса потребителя B_2 корректируем повторно, теперь $x_{12} = 35$. Получаем $b''_2 = b'_2 - x_{22} = 36 - 35 = 1$.

В клетку (3,2) загружаем $x_{32} = \min(a_3, b''_2) = \min(58,1) = 1$. Спрос потребителя B_2 теперь удовлетворен, закрываем второй столбец. Корректируем значение запаса $a'_3 = a_3 - x_{32} = 58 - 1 = 57$.

Смещаемся вправо, в клетку (3,3). Находим $x_{33} = \min(a'_3, b_3) = \min(57,26) = 26$. Закрываем третий столбец. Корректируем значение $a''_3 = a'_3 - x_{33} = 57 - 26 = 31$.

В оставшуюся клетку (3,4) заносится единственно возможное число $x_{34} = 31$, после чего закрываются и третья строка, и четвертый столбец.

Так как в данной задаче $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$, а заполненных клеток тоже 6, то мы можем констатировать, что полученный план является невырожденным.

Значение целевой функции при использовании полученного опорного плана равно

$F = 18 \cdot 21 + 23 \cdot 13 + 21 \cdot 35 + 25 \cdot 1 + 21 \cdot 6 + 17 \cdot 31 = 2510$.

Таблица 3

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18 21	23 13	14	20	34
A_2	12	21 35	25	15	35
A_3	15	25 1	21 26	17 31	58
Потребности	21	49	26	31	127

4. Метод минимального элемента.

Этот метод, как правило, обеспечивает более эффективное построение начального опорного плана, так как при его использовании учитываются величины тарифов c_{ij}.

В соответствии с методом минимального элемента просматривают распределительную таблицу и находят клетку (i, j) с наименьшим тарифом c_{ij}

(если таких клеток несколько, то выбирают любую из них). В клетку загружают наибольшее возможное значение поставки. После этого из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. Затем из оставшихся клеток таблицы снова выбирают клетку с наименьшим тарифом и т.д.. В результате получают опорный план, который содержит $m+n-1$ загруженных клеток.

Пример 3. Методом минимального элемента построить начальный опорный план для задачи, исходные данные которой приведены в таблице 3.

При решении примера 2 мы уже убедились, что рассматриваемая задача является задачей с закрытой моделью. Приступаем теперь к нахождению начального опорного плана.

Находим клетку с наименьшим тарифом. Это клетка (1,2). Так как $a_2 = 35$, а $b_1 = 21$, то $x_{21} = \min(a_2, b_1) = \min(35,21) = 21$. Загружаем в клетку (1,2) число 21 (см. таблицу 4). При этом спрос потребителя B_1 оказывается полностью удовлетворенным и мы закрываем первый столбец. Исходное значение запаса $a_2 = 35$ корректируем на 21 и получаем $a'_2 = a_2 - x_{21} = 35 - 21 = 14$.

Просматриваем множество оставшихся незакрытых клеток (т.е. все клетки кроме первого столбца) и находим клетку с наименьшим тарифом. Это клетка (1,3). В эту клетку загружаем число $x_{13} = \min(a_1, b_3) = \min(34,26) = 26$ Теперь спрос потребителя B_3 исчерпан полностью и мы закрываем третий столбец. Величину запаса поставщика A_1 корректируем на $x_{13} = 26$` и получаем $a'_1 = a_1 - x_{13} = 34 - 26 = 8$.

Из множества оставшихся незакрытых клеток снова выбираем клетку с наименьшим тарифом. Это клетка (2,4). Загружаем ее числом $x_{24} = \min(a'_2, b_4) = \min(14,31) = 14$. Закрываем вторую строку и корректируем величину спроса потребителя B_4, получая $b'_4 = b_4 - x_{24} = 31 - 14 = 17$.

Из четырех оставшихся незакрытых клеток наименьший тариф у клетки (3,4). Загружаем $x_{34} = \min(a_3, b'_4) = \min(58,17) = 17$. Четвертый столбец закрываем, корректируем значение запаса $a'_3 = a_3 - x_{34} = 58 - 17 = 41$.

Остались клетки (1,2) и (3,2). Наименьший тариф у клетки (1,2). Находим $x_{12} = \min(a'_1, b_2) = \min(8,49) = 8$. Закрываем первую строку. Корректируем значение $b'_2 = b_2 - x_{12} = 49 - 8 = 41$.

В оставшуюся клетку (3,2) заносим число $x_{32} = 41$, после чего закрываются третья строка, и второй столбец.

Полученный план является невырожденным, так как число заполненных клеток 6 совпадает с числом $m+n-1 = 3+4-1 = 6$.

Значение целевой функции при использовании полученного опорного плана равно

$$F = 23 \cdot 8 + 14 \cdot 26 + 12 \cdot 21 + 15 \cdot 14 + 25 \cdot 41 + 17 \cdot 17 = 2324.$$

Очевидно, это значение меньше, чем значение целевой функции, полученное при использовании начального опорного плана, найденного методом северо-западного угла.

Таблица 4

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	23 8	14 26	20	34
A_2	12 21	21	25	15 14	35
A_3	15	25 41	21	17 17	58
Потребности	21	49	26	31	127

Замечание. При заполнении таблицы могут возникать ситуации, когда одновременно закрываются и строка, и столбец. В этом случае в свободную клетку записывают число 0 и считают такую клетку загруженной (чтобы отличать нулевую загрузку от свободной клетки иногда пишут 0*). Число 0* может быть записано только в те свободные клетки, которые не образуют циклов с ранее занятыми клетками (о понятии цикла будет сказано далее).

Пример 4. Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют три вида сырья. Потребности в сырье каждого из предприятий соответственно равны b_j, $j=1,2,3,4$. Сырье сосредоточено в трех местах его получения, а запасы соответственно равны a_i, $i=1,2,3$. На каждое из предприятий сырье может завозиться из любого пункта его получения. Тарифы перевозок представлены в следующей таблице:

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	8	10	5	160
A_2	4	6	2	3	30
A_3	4	4	6	5	90
Потребность в грузе	100	40	80	60	

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Решение. Составление первоначального плана перевозок начнем с перевозки поставщика A_1. Будем за счет его запасов максимально возможно удовлетворять заказы сначала потребителя B_1, затем B_2 и так далее. Таким образом, мы будем заполнять таблицу, начиная с клетки $(1,1)$, и двигаться вправо по строке до тех пор, пока остаток запасов поставщика A_1 не окажется меньше заказа очередного потребителя. Для выполнения этого заказа используем остатки запаса первого поставщика, а недостающую часть добавим из запасов поставщика A_2, то есть переместимся на следующую

строку таблицы по столбцу, соответствующему указанному потребителю. Далее аналогичным образом распределим запасы поставщика A_2, затем A_3 и так далее.

В результате загруженные клетки расположатся вдоль диагонали $(1,1)$ – (m,n), поэтому способ «северо-западного угла» называют еще диагональным способом.

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8 40	10 20	5	160
A_2	4	6	2 30	3	30
A_3	4	4	6 30	5 60	90
Потребность в грузе	100	40	80	60	

Распределяя запасы поставщика A_1 сначала потребителю B_1, а затем B_2, получим: $x_{11}=100$, $x_{12}=40$. После этого у поставщика A_1 остается еще 20 единиц груза, а потребителю B_3 нужно 80 единиц. Удовлетворим спрос потребителя B_3, отправив ему 20 единиц груза, оставшихся у поставщика A_1, 30 единиц груза от поставщика A_2 и 30 единиц груза от поставщика A_3. Следовательно, $x_{13}=20$, $x_{23}=30$, $x_{33}=30$.

У поставщика A_3 остается 60 единиц груза. Этот груз и отправим потребителю B_4. Таким образом, $x_{34}=60$.

Все запасы груза вывезены и все потребители удовлетворены. Общая стоимость перевозок по данному плану: $f=4\cdot100+8\cdot40+10\cdot20+2\cdot30+6\cdot30+5\cdot60=1460$ ден. ед.

Существенным недостатком метода «северо-западного угла» является игнорирование при загрузке клеток тарифов c_{ij}, поэтому построенный опорный план обычно оказывается весьма далеким оптимального.

Рассмотри сейчас вопрос составления первоначального плана перевозок с помощью правила «минимального элемента».

Построение плана начинается с клетки с наименьшим тарифом перевозок. При наличии нескольких клеток с одинаковыми тарифами выберем любую из них. Пусть это клетка (i,j). Запишем в этой клетке элемент $x_{ij}=\min(a_i,b_j)$. Если $a_i<b_j$, то запасы поставщика A_i исчерпаны, а потребителю потребуется еще $b_j''=b_j-a_i$ единиц груза. Не принимая более во внимание i-ю строку, снова ищем клетку с наименьшей стоимостью перевозок и заполняем ее с учетом изменившихся потребностей.

В случае $a_i > b_j$ из рассмотрения исключается j-й столбец, а запасы поставщика A_i полагаются равными $a_i'' = a_i - b_j$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все запасы не будут исчерпаны, а все потребности удовлетворены.

Заметим, что при наличии в таблице клеток с одинаковыми тарифами, планы, полученные с помощью этого метода, могут быть разными, но они, несомненно, ближе к оптимальному плану, чем план, составленный с помощью метода «северо-западного угла».

Пример 5. По условиям примера 4 составить опорный план способом «минимального элемента».

Решение. Поскольку наименьший тариф (число 2) стоит в клетке $(2,3)$, то запишем в эту клетку элемент $x_{23} = 30$. Тогда $b_3'' = 50$, а 2-ю строку таблицы можно больше не учитывать.

Среди оставшихся клеток имеются три клетки с наименьшим тарифом перевозок, равным 4: $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$. Выберем, например, клетку $(1,1)$ и запишем в нее число $x_{11} = 100$. Получим, что $a_1'' = 60$, а первый столбец больше не рассматриваем. Теперь наименьший тариф, равный 4, поставлен в клетке $(3,2)$, поэтому $x_{32} = 40$, $b_3'' = 50$ и 2-й столбец больше не рассматриваем.

Далее выбираем клетку $(1,4)$ с тарифом 5 и записываем в ней $x_{14} = 60$. Исключаем из рассмотрения 1-ю строку и 4-й столбец, так как $a_1'' = b_4 = 60$. Переходим к последней клетке $(3,3)$, в которую записываем перевозку $x_{33} = 50$.

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 100	8	10	5 60	160
A_2	4	6	2 30	3	30
A_3	4	4 40	6 50	5	90
Потребность в грузе	100	40	80	60	

Общая стоимость перевозок по данному плану:

$$f = 4 \cdot 100 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 30 + 6 \cdot 50 + 5 \cdot 60 = 1220 \text{ ден. ед.}$$

Пример 6. Транспортная задача задана таблицей:

Поставщик	Потребитель					Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4	5	1	3	2	100
A_2	3	4	7	6	8	50
A_3	2	3	5	9	8	20
A_4	1	4	6	7	9	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	

Требуется: а) составить математическую модель ТЗ; б) привести задачу к сбалансированному (закрытому) виду; в) построить опорный план методом «северо-западного угла»; г) построить опорный план методом «минимального элемента».

Решение. Пусть x_{ij} – объем перевозки от поставщика A_i к потребителю B_j.

Поставщик	Потребитель					Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4 x_{11}	5 x_{12}	1 x_{13}	3 x_{14}	2 x_{15}	100
A_2	3 x_{21}	4 x_{22}	7 x_{23}	6 x_{24}	8 x_{25}	50
A_3	2 x_{31}	3 x_{32}	5 x_{33}	9 x_{34}	8 x_{35}	20
A_4	1 x_{41}	4 x_{42}	6 x_{43}	7 x_{44}	9 x_{45}	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией перевозок, можно представить целевой функцией

$$f = 4x_{11} + 5x_{12} + x_{13} + 3x_{14} + 2x_{15} + 3x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} + 6x_{24} + 8x_{25} + \\ + 2x_{31} + 3x_{32} + 5x_{33} + 9x_{34} + 8x_{35} + x_{41} + 4x_{42} + 6x_{43} + 7x_{44} + 9x_{45}. \quad (6)$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по запасам

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 20, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 20. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям по потребностям

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 20, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 20, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 40, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 60, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 40. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Поскольку обратные перевозки не предполагаются, то

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,...,4;\ j = 1,...,5). \quad (9)$$

Математическую модель транспортной задачи можно сформулировать так: среди множества решений систем линейных уравнений (7), (8) и неравенств (9) найти такое решение, которое доставляет минимум линейной функции (7).

б) Суммарные запасы поставщиков равны $\sum_{i=1}^{4} a_i = 100+50+20+20 = 190$, а суммарные заявки потребителей равны $\sum_{j=1}^{5} b_j = 20+20+40+60+40 = 180$. Поскольку $\sum_{i=1}^{4} a_i \neq \sum_{j=1}^{5} b_j$, то задача открытая (несбалансированная).

Так как $\sum_{i=1}^{4} a_i > \sum_{j=1}^{5} b_j$, то для сбалансированности задачи вводим фиктивного потребителя с заявкой $\sum_{i=1}^{4} a_i - \sum_{j=1}^{5} b_j = 190-180 = 10$ и нулевыми тарифами перевозок.

Сбалансированная задача примет вид:

Поставщик	Потребитель						Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	4	5	1	3	2	0	100
A_2	3	4	7	6	8	0	50
A_3	2	3	5	9	8	0	20
A_4	1	4	6	7	9	0	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	10	190

в) Построение опорного плана методом «северо-западного угла» начнем с левой верхней клетки.

Рассмотрим клетку $(1,1)$. Так как $\min\{a_1; b_1\} = \min\{100;20\} = 20$, то в эту клетку заносим $x_{11} = 20$. Заявка первого потребителя удовлетворена. Поэтому первый столбец далее не рассматриваем.

Движемся по первой строке к клетке $(1,2)$. У первого поставщика осталось $a_1' = 80$ единиц запаса груза, поэтому в рассматриваемую клетку заносим $\min\{a_1'; b_2\} = \min\{80;20\} = 20 = x_{12}$. Заявка второго потребителя удовлетворена полностью, второй столбец далее не рассматриваем.

Переходим к клетке $(1,3)$. У первого поставщика осталось $a_1'' = 60$ единиц запаса груза, поэтому в рассматриваемую клетку заносим $\min\{a_1''; b_3\} = \min\{60;40\} = 40 = x_{13}$. Заявка третьего потребителя удовлетворена, поэтому третий столбец далее не рассматриваем.

Переходим далее к клетке $(1,4)$. У первого поставщика осталось $a_1''' = 20$ единиц запаса груза, поэтому в рассматриваемую клетку заносим $\min\{a_1'''; b_4\} = \min\{20;60\} = 20 = x_{14}$. Поскольку запасы первого поставщика исчерпаны, первую строку исключаем из рассмотрения.

Заявка четвертого потребителя не удовлетворена. Переходим к клетке $(2,4)$. Четвертому потребителю требуется еще $b_4' = 40$ единиц груза, поэтому в клетку $(2,4)$ заносим $\min\{a_2; b_4'\} = \min\{50;40\} = 40 = x_{24}$. Заявка четвертого

потребителя удовлетворена. Исключаем четвертый столбец из дальнейшего рассмотрения.

Переходим к клетке $(2,5)$. У второго поставщика осталось $a_2' = 10$ единиц запаса груза, поэтому в клетку $(2,5)$ заносим $\min\{a_2'; b_5\} = \min\{10;40\} = 10 = x_{25}$. Запасы второго поставщика исчерпаны. Вторую строку далее не рассматриваем.

Переходим к третьей строке. Движемся к клетке $(3,5)$. Пятому потребителю требуется еще $b_5' = 30$ единиц груза, поэтому в клетку $(3,5)$ заносим $\min\{a_3; b_5'\} = \min\{20;30\} = 20 = x_{35}$. Запасы третьего поставщика исчерпаны, третью строку исключаем из дальнейшего рассмотрения.

Заявка пятого потребителя не удовлетворена. Ему требуется еще $b_5'' = 10$ единиц груза. Поэтому в клетку $(4,5)$ заносим $\min\{a_4; b_5''\} = \min\{20;10\} = 10 = x_{45}$. Исключаем пятый стол из рассмотрения.

Переходим к клетке $(4,6)$. У четвертого поставщика осталось $a_4' = 10$ единиц запаса груза. В клетку $(4,5)$ заносим $\min\{a_4'; b_6\} = \min\{10;10\} = 10 = x_{46}$.

Таким образом, имеем:

Поставщик	Потребитель						Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	4 20	5 20	1 40	3 20	2	0	100
A_2	3	4	7	6 40	8 10	0	50
A_3	2	3	5	9	8 20	0	20
A_4	1	4	6	7	9 10	0 10	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	10	190

Для того чтобы план был опорным, необходимо и достаточно, чтобы число заполненных клеток было равно $m+n-1$, где m – число поставщиков, n – число потребителей. В нашем случае $m+n-1=4+6-1=9$, число заполненных клеток равно 9. Таким образом, построен опорный план.

Заметим, что в случае, когда заполненных клеток меньше $m+n-1$, в незаполненные клетки (как правило, с наименьшим не нулевым тарифом) вводится нулевая поставка 0^*. В дальнейших расчетах эта клетка считается заполненной.

г) Построим опорный план методом «минимального элемента».

Выберем наименьший тариф, например, $c_{16} = 0$. В клетку $(1,6)$ заносим $\min\{a_1; b_6\} = \min\{100;10\} = 10 = x_{16}$. Заявка шестого потребителя удовлетворена. Шестой столбец больше не рассматриваем.

Среди оставшихся клеток имеются две клетки с наименьшим тарифом перевозок, равным 1: $(4,1)$, $(1,3)$. Выберем, например, клетку $(4,1)$ и заносим в

нее $\min\{a_4; b_1\} = \min\{20;20\} = 20 = x_{41}$. Заявка первого потребителя удовлетворена, запас четвертого поставщика исчерпан. Поэтому исключаем из дальнейшего рассмотрения первый столбец и четвертую строку.

Среди оставшихся клеток минимальный тариф $c_{13} = 1$. В клетку $(1,3)$ заносим $\min\{a_1'; b_3\} = \min\{90;40\} = 40 = x_{13}$. Заявка третьего потребителя удовлетворена, исключаем из дальнейшего рассмотрения третий столбец.

Теперь наименьший тариф, равный 2, поставлен в клетке $(1,5)$. В эту клетку заносим $\min\{a_1''; b_5\} = \min\{50;40\} = 40 = x_{15}$. Заявка пятого потребителя удовлетворена, исключаем из рассмотрения пятый столбец.

Среди оставшихся клеток имеются две клетки с наименьшим тарифом перевозок, равным 3: $(1,4)$, $(3,2)$. Выберем, например, клетку $(3,2)$ и заносим в нее $\min\{a_3; b_2\} = \min\{20;20\} = 20 = x_{32}$. Далее не рассматриваем второй столбец и третью строку, так как заявка второго потребителя удовлетворена, запас третьего поставщика исчерпан.

Среди оставшихся клеток минимальный тариф, равный 3, содержится в клетке $(1,4)$. Заносим в эту клетку $\min\{a_1''; b_4\} = \min\{10;60\} = 10 = x_{14}$.

Поскольку запасы первого поставщика исчерпаны, то первую строку далее не рассматриваем.

Остался тариф $c_{24} = 6$. В клетку $(2,4)$ заносим $\min\{a_2; b_4'\} = \min\{50;50\} = 50 = x_{24}$.

Полученный план ТЗ не является опорным, поскольку $m + n - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$, а заполнено 7 клеток. Для получения опорного плана в таблицу введем две нулевые поставки 0^*, например, в клетки $(1,2)$, $(3,3)$, после чего эти клетки будем считать заполненными.

Получен следующий опорный план ТЗ:

Поставщик	Потребитель						Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	4	5 0^*	1 40	3 10	2 40	0 10	100
A_2	3	4	7	6 50	8	0	50
A_3	2	3 20	5 0^*	9	8	0	20
A_4	1 20	4	6	7	9	0	20
Потребность в грузе	20	20	40	60	40	10	190

Упражнения

В задачах 1 – 5 требуется: а) составить математическую модель ТЗ; б) привести задачу к сбалансированному (закрытому) виду; в) построить опорный план методом «северо-западного угла»; г) построить опорный план методом «минимального элемента»; д) определить соответствующие значения целевых функций.

1.

Поставщик	Потребитель			Запас груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1	3	2	50
A_2	4	5	7	100
A_3	6	2	4	130
Потребность в грузе	70	100	110	280

2.

Поставщик	Потребитель			Запас груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	6	4	2	24
A_2	3	5	4	28
A_3	3	6	3	23
Потребность в грузе	20	25	30	75

3.

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	3	2	6	50
A_2	2	4	5	1	70
A_3	3	6	7	5	100
Потребность в грузе	40	60	50	70	220

4.

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	2	3	300
A_2	6	3	7	1	200
A_3	4	5	3	2	500
A_4	2	4	6	4	700
Потребность в грузе	230	420	650	400	1700

5.

Поставщик	Потребитель						Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	2	4	3	1	6	3	3000
A_2	5	7	4	5	2	1	5000
A_3	3	6	1	4	3	7	1250
A_4	1	3	2	6	4	5	7300
Потребность в грузе	2300	3200	4000	1760	1500	2220	16550>15000

7. МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

После нахождения начального опорного плана необходимо проверить является ли найденный план транспортной задачи оптимальным и, если нет, улучшить его.

1. Проверка построенного опорного плана на оптимальность

Потенциалами опорного плана называют такие числа u_i и v_j, что $u_i + v_j = c_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, для всех заполненных клеток. Каждому пункту отправления ставят в соответствие потенциал u_i, $i = \overline{1,m}$, а каждому пункту назначения – потенциал v_j, $j = \overline{1,n}$.

Оценкой свободной клетки называется число

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \qquad (60)$$

Соотношения $u_i + v_j = c_{ij}$ являются системой, в которую входит $m+n-1$ линейных уравнений с $m+n$ неизвестными. Эта система является совместной, причем одно из неизвестных можно положить равным нулю (обычно $u_1 = 0$). После этого все переменные определяются однозначно. В большинстве задач нахождение потенциалов может быть осуществлено устно.

Теорема. Если для опорного плана $X = (x_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, транспортной задачи существует система из $m+n$ чисел u_i и v_j, удовлетворяющих условиям

$$u_i + v_j = c_{ij} \ \textit{для} \ x_{ij} > 0 \qquad (61)$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \ \textit{для} \ x_{ij} = 0, \qquad (62)$$

то $X = (x_{ij})$ – оптимальный план транспортной задачи.

Таким образом, для установления оптимальности опорного плана требуется:

Для всех заполненных клеток $(x_{ij} > 0)$ из соотношений $u_i + v_j = c_{ij}$ вычислить потенциалы поставщиков u_i, $i = \overline{1,m}$, и потенциалы потребителей v_j, $j = \overline{1,n}$.

Для всех незаполненных клеток $(i; j)$ проверить выполнение условия $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \ge 0$, где s_{ij} — характеристика каждой свободной клетки таблицы. Если для всех свободных клеток таблицы условие $s_{ij} \ge 0$ выполнено, то, в соответствии с теоремой, построенный опорный план транспортной задачи является оптимальным и решение задачи завершено. В противном случае переходят к следующему шагу алгоритма – улучшению опорного плана.

2. Улучшение опорного плана

С целью улучшения опорного плана из множества всех свободных клеток с отрицательными оценками $s_{ij} < 0$ нужно выбрать наименьшее (наибольшее по абсолютной величине). Для клетки, в которой находится это число s_{ij}, нужно построить цикл.

Циклом в распределительной таблице называется замкнутая ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья – вдоль строк и столбцов, причем к каждой вершине подходят ровно два ребра, одно по строке, а другое – по столбцу (если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки самопересечения не являются вершинами).

Если существует несколько свободных клеток таблицы, в которых выполняется неравенство $s_{ij} < 0$, то клетку с наименьшим значением $s_{ij} < 0$ будем называть перспективной и выполним следующие действия.

В таблице строим цикл, одна вершина которого находится в перспективной свободной клетке (r, p), а все остальные вершины – в заполненных клетках. Каждой вершине цикла присваиваем поочередно знаки плюс или минус, при этом вершине в перспективной клетке (r, p) присваиваем знак плюс, следующей за ней вершине цикла – знак минус, следующей вершине – знак плюс и т.д.

Следующий шаг – перераспределение груза по циклу.

Пусть Q – наименьшее из чисел x_{ij}, стоящих в клетках, которым присвоен знак минус, и пусть это число находится в клетке (k,l), $Q = x_{kl}$ (в случае существования нескольких клеток, содержащих одно и то же число Q, можно выбрать любую из них). Далее транспортная таблица преобразуется следующим образом:

клетки, не содержащие вершины цикла, остаются без изменения;

в клетки цикла, отмеченные знаком плюс, записывается число $x_{ij} + Q$;

клетка (k,l) считается незаполненной, а в остальные клетки (i, j), отмеченные знаком минус, записывается число $x_{ij} - Q$.

В результате указанных перемещений грузов в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, определяют новый опорный план транспортной задачи.

Если в минусовых клетках имеется два (или более) одинаковых чисел x_{ij}, то освобождают лишь одну из таких клеток, а остальные оставляют занятыми (с нулевыми поставками).

Полученный новый опорный план транспортной задачи проверяют на оптимальность. Для этого снова определяют потенциалы пунктов отправления и назначения и находят числа s_{ij} для всех свободных клеток. Если среди этих чисел не окажется отрицательных, то это свидетельствует о получении оптимального плана. Если же отрицательные числа имеются, то следует перейти к новому опорному плану. В результате итерационного процесса после конечного числа шагов получают оптимальный план задачи.

Пример 4. Построить оптимальный план для задачи, исходные данные которой приведены в примере 3.

В качестве опорного плана возьмем план, построенный в примере 3 методом минимального элемента.

Проверим, является ли этот план оптимальным. Для этого составим систему уравнений вида (61), используя значения тарифов c_{ij} в занятых клетках:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 23, \\ u_1 + v_3 = 14, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_4 = 15, \\ u_3 + v_2 = 25, \\ u_3 + v_4 = 17. \end{cases}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим, что $v_2 = 23$, $v_3 = 14$, $u_3 = 2$, $v_4 = 15$, $u_2 = 0$, $v_1 = 12$. Найденные значения потенциалов показаны в таблице 5 (дополнительная строка сверху и столбец слева).

Таблица 5

v_j		12	23	14	15	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	18	23 8	14 26	20	34
0	A_2	12 21	21	25	15 14	35
2	A_3	15	25 41	21	17 17	58
		21	49	26	31	127

Вычислим оценки свободных клеток по формуле $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$s_{11} = 18 - (0 + 12) = 6$, $\quad s_{14} = 20 - (0 + 15) = 5$

$s_{22} = 21 - (0 + 23) = -2$, $\quad s_{23} = 25 - (0 + 14) = 11$,

$s_{31} = 15 - (2 + 12) = 1$, $\quad s_{33} = 21 - (2 + 14) = 5$.

Так как одна из оценок s_{ij} отрицательная, то построенный опорный план не является оптимальным.

Отметим, что при решении практических задач находить все оценки свободных клеток не обязательно, достаточно устно сравнить сумму потенциалов $u_i + v_j$ и тариф c_{ij}. Значение оценки вычисляется только в тех случаях, когда $u_i + v_j > c_{ij}$.

Отрицательная оценка получена для клетки (2,2).

Строим для этой клетки цикл. Кроме клетки (2,2) в этот цикл входят клетки (2,4), (3,4), (3,2). Расставляем знаки в клетках, включенных в цикл: клеткам (2,4) и (3,2) соответствует минус, клетке (3,4) – плюс.

Из клеток, помеченных знаком минус, выбираем ту, в которую загружено меньше число. В данном случае это число $Q = 14$, загруженное в клетку (2,4). Проведем перераспределения груза по циклу: в клетки (2,2) и (3,4) добавляем 14, значение 41, стоящее в клетке (3,2). Уменьшаем на 14, а клетку

(2,4) далее считаем свободной. В результате получаем новый опорный план (таблица 6).

Таблица 6

v_j		14	23	14	15	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	18	23 8	14 26	20	34
–2	A_2	12 21	21 14	25	15	35
2	A_3	15	25 27	21	17 31	58
		21	49	26	31	127

Проверяем полученный опорный план на оптимальность. Для этого снова составляем систему уравнений вида (61), используя значения тарифов c_{ij} в занятых клетках:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 23, \\ u_1 + v_3 = 14, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_2 = 21, \\ u_3 + v_2 = 25`, \\ u_3 + v_4 = 17. \end{cases}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим, что $v_2 = 23$, $v_3 = 14$, $u_3 = 2$, $v_4 = 15$, $u_2 = -2$, $v_1 = 14$. Новые значения потенциалов указаны в таблице 6.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$s_{11} = 18 - (0 + 14) = 4$, $\quad s_{14} = 20 - (0 + 15) = 5$,

$s_{23} = 25 - (-2 + 14) = 13$ $\quad s_{24} = 15 - (-2 + 15) = 2$,

$s_{31} = 15 - (2 + 14) = -1$, $\quad s_{33} = 21 - (2 + 15) = 4$.

Как видно, полученный опорный план снова не является оптимальным, так как одна из оценок свободных клеток является отрицательной.

Значение целевой функции при использовании полученного опорного плана равно

$F = 23 \cdot 8 + 14 \cdot 26 + 12 \cdot 21 + 21 \cdot 14 + 25 \cdot 27 + 17 \cdot 31 = 2296$.

Так как отрицательная оценка получена для клетки (3,1), то строим для этой клетки цикл. В цикл входят клетки (3,1), (3,2), (2,2) и (2,1). Клеткам (3,2) и (2,1) ставим в соответствие минус, клеткам (3,1) и (2,2) – плюс.

Из клеток, помеченных знаком минус, выбираем ту, в которую загружено меньше число. В данном случае это число *Q*=21, загруженное в клетку (2,1). Проведем перераспределения груза по циклу: в клетки (3,1) и (2,2) добавляем 21, в клетке (3,2). вычитаем 21, а клетку (2,1) далее считаем свободной. В результате получаем новый опорный план (таблица 7).

Таблица 7

v_j		13	23	14	15	
u_i		B_1	B_2	B_3	B_4	
0	A_1	18	23 8	14 26	20	34
–2	A_2	12	21 35	25	15	35
2	A_3	15 21	25 6	21	17 31	58
		21	49	26	31	127

Проверяем полученный опорный план на оптимальность. Составляем систему уравнений вида (61):

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 23, \\ u_1 + v_3 = 14, \\ u_2 + v_2 = 21, \\ u_3 + v_1 = 15, \\ u_3 + v_2 = 25`, \\ u_3 + v_4 = 17. \end{cases}$$

Полагаем $u_1 = 0$ и находим, что $v_2 = 23$, $v_3 = 14$, $u_3 = 2$, $v_4 = 15$, $u_2 = -2$, $v_1 = 13$. Новые значения потенциалов указаны в таблице 7.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$s_{11} = 18 - (0 + 13) = 5$, $\quad s_{14} = 20 - (0 + 15) = 5$,

$s_{21} = 12 - (-2 + 13) = 1$, $\quad s_{23} = 25 - (-2 + 14) = 13$,

$s_{24} = 15 - (-2 + 15) = 2$, $\quad s_{33} = 21 - (2 + 15) = 4$.

Так как все оценки свободных клеток являются неотрицательными, то полученный план является оптимальным.

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 26 & 0 \\ 21 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 & 31 \end{bmatrix}$$

Значение целевой функции при использовании полученного оптимального плана равно

$F = 23 \cdot 8 + 14 \cdot 26 + 21 \cdot 35 + 15 \cdot 21 + 25 \cdot 6 + 17 \cdot 31 = 2275$.

Экономические приложения транспортной задачи не исчерпываются решением задач, связанных с перевозкой грузов. Модель транспортной задачи применима также при решении задач оптимизации размещения объектов производства, составлении модели топливно-энергетического баланса, составлении планов распределения сельскохозяйственных культур по участкам различного плодородия и др.

Упражнения

В задачах 1 – 5 требуется: а) построить опорный план «методом потенциалов»; д) определить соответствующие значения целевых функций.

1.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		60	70	50
A1	90	7	4	9
A2	80	8	5	3
A3	50	4	6	5

2.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		40	90	30
A1	60	1	3	4
A2	50	2	5	1
A3	70	4	5	3

3.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		100	50	80
A1	120	4	8	10
A2	60	5	3	9
A3	90	6	7	4

4.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		60	90	80
A1	80	6	7	8
A2	100	9	10	4
A3	70	3	5	9

5.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		90	80	50
A1	100	4	3	4
A2	70	3	2	5
A3	80	5	4	4

5. Три молочных фермы с суточным производством 40, 25 и 35 тыс. л. молока снабжают четыре молокозавода, спрос у которых 15, 40, 30 и 15 тыс. л. молока в сутки. Молоко доставляется на заводы молоковозами, одинаковыми по вместимости. Стоимость провоза молока молоковозом на расстояние 1 км составляет 3 ден. ед. Расстояние от ферм до молокозаводов следующее:

Таблица

Молочные фермы	Молокозаводы			
	1	2	3	4
I	10	5	7	4
II	7	4	9	10
III	6	14	8	7

Найти оптимальный план поставки молока с ферм на молокозаводы с минимальными транспортными издержками. Рассчитайте стоимость доставки молока от каждой фермы до молокозавода.

6. Имеется три участка пашни, на которых могут быть засеяны кукуруза, пшеница, ячмень и просо. Площадь каждого из участков равна соответственно 600, 180 и 220 га. Кукурузой, пшеницей, ячменем и просом следует засеять 290, 180, 110 и 420 га соответственно. Урожайность для каждого из участков различна и задается матрицей.

$$\begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 & 48 \\ 30 & 28 & 22 & 25 \\ 18 & 22 & 14 & 19 \end{pmatrix}.$$

Определить, сколько гектаров каждой культуры на каждом из участков следует засеять, чтобы общий сбор зерна был максимальным.

7. Четыре растворных узла поставляют раствор четырем строительным фирмам. Для перевозки раствора используются однотипные автомашины. Объем производства растворных узлов в день равен 30, 20, 40 50т. Потребности строительных фирм в день: 35, 20 55, 30т. Расстояние в километрах от растворных узлов до строительных объектов указано в таблице.

Растворный узел	Строительные фирмы			
	1	**2**	**3**	**4**
I	2	4	1	3
II	5	6	3	4
III	3	6	7	5
IV	1	2	9	3

Определите, в каком объеме, с каких растворных узлов и куда должен доставляться раствор, чтобы транспортные издержки по его доставке автотранспортом были минимальными.

8. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Постановка общей задачи целочисленного программирования

Задача математического программирования, переменные которой принимают только целочисленные значения, называется задачей целочисленного программирования (ЗЦП).

В математической модели ЗЦП как целевая функция, так и функции в системе ограничений могут быть линейными, нелинейными и смешанными. Рассмотрим случай, когда целевая функция и система ограничений задачи являются линейными. Тогда математическая постановка ЗЦП формулируется следующим образом:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \rightarrow \ \max \ (\min), \tag{63}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{64}$$

$$d_j \le x_j \le D_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{65}$$

где $x_j = 0,1,2,...$ – целые ($j = \overline{1,n_1}, n_1 \le n$), $d_j \ge 0$. Если $n_1 = n$, то задачу называют полностью целочисленной; если $n_1 < n$, то частично-целочисленной.

2. Способы решения задач целочисленного программирования

Существуют различные способы решения ЗЦП.

1 способ. Решить ЗЦП как непрерывную ЗЛП; округлить полученные значения переменных; проверить приемлемость округленного решения. Если решение приемлемо, то оно принимается как решение ЗЦП.

2 способ. Если необходимо найти точное решение ЗЦП, а множество решений ЗЦП невелико, то может быть применен полный перебор возможных значений целочисленных переменных с последующим выбором наилучшего с точки зрения целевой функции. При большом количестве переменных и значительной области допустимых значений метод неприменим из-за своей трудоемкости.

3 способ. Для нахождения точного решения ЗЦП в общем случае применяют специальные методы, такие как метод Гомори, метод ветвей и границ и др.

9. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Постановка общей задачи параметрического программирования

Задача параметрического программирования имеет следующий вид:

$$L = \sum_{j=1}^{n} (c'_j + c''_j t) x_j \ \rightarrow \ \max \ (\min), \tag{66}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{67}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{68}$$

где c'_j, c''_j, a_{ij}, b_i – заданные постоянные числа.

Может быть поставлена и обобщенная параметрическая задача, в которой от параметра t линейно зависят коэффициенты при неизвестных в целевой функции (цены изделий от спроса на них), в системе уравнений (нормы расхода ресурсов от применяемых технологий), свободные члены системы уравнений (наличие ресурсов от предложений поставщиков):

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} (c'_j + c''_j t) x_j \rightarrow \max \text{ (min)}, \tag{69}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a'_{ij} + a''_{ij}) x_j = b'_i + b''_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{70}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{71}$$

$$\alpha \leq t \leq \beta, . \tag{72}$$

где α, β – промежуток изменения значений параметра t.

Решение задач (66)-(68), (69)-(72) можно найти методами линейного программирования.

Предположим, что в задаче (66)-(68) множество неотрицательных решений системы линейных уравнений (67) (многогранник решений) не пустое и включает более чем одну точку. Тогда исходная задача состоит в определении при каждом параметре $t \in [\alpha, \beta]$ такой точки многогранника решений, в которой функция (66) принимает максимальное значение. Чтобы найти эту точку, будем считать, что $t = t_0$ и найдем решение полученной ЗЛП (66)-(68), т. е. определим вершину многогранника решений, в которой функция (66) имеет максимум, либо устанавливаем, что при данном значении t_0 задача неразрешима.

После нахождения точки, в которой при $t = t_0$ функция (66) принимает максимальное значение, ищут множество значений t, для которых координаты этой точки определяют оптимальный план задачи (66)-(68). Найденные параметры t исключают из рассмотрения и берут некоторое новое значение t из промежутка $[\alpha, \beta]$.

Для выбранного значения параметра t из промежутка $[\alpha, \beta]$ либо находят оптимальный план, либо устанавливают неразрешимость задачи.

10. ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Постановка общей задачи дробно-линейного программирования

Общая задача дробно-линейного программирования формулируется в следующем виде:

$$L = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{L_1}{L_2} \to \max, \tag{73}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{74}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},. \tag{75}$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} – некоторые постоянные числа, $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j > 0$.

При $n = 2$:

$$L = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \to \max, \tag{76}$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{77}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,. \tag{78}$$

где $d_1 x_1 + d_2 x_2 > 0$.

2. Алгоритм решения ЗДЛП при $n = 2$.

1. Построить область (многоугольник) допустимых решений Для этого:
   - в неравенствах (77) и (78) заменить знаки неравенств на знаки равенств;
   - построить прямые, определяемые этими равенствами;
   - найти полуплоскости, определяемые каждым из неравенств системы ограничений задачи;
   - найти область (многоугольник) допустимых решений задачи.
2. Построить прямую уровня. Для этого:
   - положить значение целевой функции равным некоторому постоянному числу L_0;
   - построить прямую $L_0 = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2}$.
3. Определить точку максимума или установить неразрешимость задачи.
4. Найти значение целевой функции в точке максимума.

3. Алгоритм решения ЗДЛП при $n > 2$.

Решение задачи дробно-линейного программирования при $n > 2$ может быть сведено к решению задачи линейного программирования.

1. Обозначить $y_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \right)^{-1}$.

2. Ввести новые переменные $y_j = y_0 x_j$, ($j = \overline{1,n}$).

При этом исходная задача ЗДЛП сводится к следующей ЗЛП:

$$L^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \rightarrow \max, \tag{79}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{80}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1, \tag{81}$$

$$y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad y_0 \geq 0 . \tag{82}$$

3. Решить полученную ЗЛП средствами линейного программирования.

III. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

1. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

1.	При решении задачи графическим методом перемещается: а) линия уровня целевой функции; б) целевая функция; в) вектор-градиент; г) сторона многоугольника планов.
2.	Вектор – градиент $\overline{C} = (C_1, C_2)$ показывает: а) направление наискорейшего подъема целевой функции; б) направление наискорейшего убывания целевой функции; в) направление наискорейшего возрастания целевой функции; г) направление наискорейшего спуска целевой функции.
3.	Задача линейного программирования будет иметь бесчисленное множество решений если: а) область допустимых решений является выпуклым незамкнутым многоугольником в направлении оптимизации целевой функции; б) область допустимых решений есть пустое множество; в) область допустимых решений является отрезком; г) область допустимых решений есть невыпуклый многоугольник.
4.	Математической моделью задачи называется: а) отображение объекта; б) задание в математической форме зависимостей между исходными данными задачи, в) цикл научных дисциплин; г) совокупность неизвестных величин.
5.	Целевая функция задачи линейной оптимизации достигает экстремального значения: а) в крайней точке (крайних точках) области допустимых решений системы ограничений; б) во внутренней точке области допустимых решений системы ограничений; в) в любой точке области допустимых решений системы ограничений; г) на границе области допустимых решений.
6.	Математическая модель задачи линейной оптимизации может быть записана в следующей форме: а) симметричной; б) графической; в) Лагранжа; г) числовой.

7.	Выберите из следующих утверждений правильное: а) область допустимых решений задачи линейной оптимизации всегда ограничена; б) область допустимых решений задачи линейной оптимизации всегда выпукла; в) область допустимых решений задачи линейной оптимизации может состоять из нескольких разрозненных областей. г) область допустимых решений задачи линейной оптимизации всегда вогнута.

2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

1.	В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается перевозка: а) однородного продукта; б) разнородных продуктов; в) разнородных комплектов; г) всевозможных материалов
2.	Транспортная задача имеет оптимальное решение, если: а) суммарный запас груза всех поставщиков превышает суммарный спрос потребителей; б) суммарный запас груза всех поставщиков равен суммарному спросу в этом грузе всех потребителей; в) суммарный запас груза всех поставщиков меньше суммарного спроса потребителей; г) суммарный запас груза всех поставщиков и всех потребителей не определен
3.	Переход к нехудшему опорному решению транспортной задачи можно осуществить: а) методом потенциалов; б) методом северо-западного угла; в) методом наименьших квадратов; г) методом функциональных уравнений
4.	Если в транспортной задаче суммарный запас грузов поставщиков меньше суммарного спроса потребителей, то: а) задача не имеет решения; б) для разрешимости задачи необходимо ввести фиктивного поставщика; в) для разрешимости задачи необходимо ввести фиктивного потребителя; г) необходимо уменьшить количество потребителей

5.	Если найдено опорное решение транспортной задачи, то: а) для каждой свободной клетки этого решения можно образовать единственный цикл; б) для каждой свободной клетки можно образовать множество циклов; в) для каждой занятой клетки можно образовать единственный цикл; г) для каждой свободной клетки нельзя образовать ни одного цикла
6.	Цикл при решении транспортной задачи методом потенциалов содержит: а) перспективную свободную клетку и часть занятых клеток; б) перспективную свободную клетку и все занятые клетки; в) занятую клетку и часть свободных клеток; г) все свободные клетки
7.	Критерием оптимальности при нахождении минимума функции транспортной задачи служит: а) неотрицательность характеристик S_{ij} свободных клеток таблицы транспортной задачи; б) неотрицательность оценок загруженных клеток таблицы транспортной задачи; в) отрицательность оценок загруженных клеток; г) равенство нулю потенциалов

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ КОНТРОЛЯ

Вариант 1

1. Цех изготавливает изделия А и Б. Расход сырья, его запас и прибыль от реализации каждого изделия указаны в таблице.

Вид сырья	Расход на изделие		Запас
	А	Б	
S_1	16	4	200
S_2	8	7	280
S_3	5	9	450
Прибыль	4	6	

Найти план производства изделий, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль от их реализации. Задачу решить графическим методом.

2. В четырех хранилищах A_1, A_2, A_3 и A_4 имеется соответственно 40, 50, 60 и 30 т топлива. Требуется спланировать перевозки топлива к трем потребителям B_1, B_2 и B_3, спрос которых соответственно равен 60, 80 и 40 т, так, чтобы затраты на транспортировку были минимальными. Стоимость перевозки 1 т задана матрицей

4 3 5
6 2 1
7 4 2
5 6 3.

Вариант 2

1. Цех изготавливает изделия А и Б. Расход сырья, его запас и прибыль от реализации каждого изделия указаны в таблице.

Вид сырья	Расход на изделие		Запас
	А	Б	
S_1	32	8	400
S_2	16	14	560
S_3	10	18	900
Прибыль	8	12	

Найти план производства изделий, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль от их реализации. Задачу решить графическим методом.

2. Мелькомбинаты № 1, 2, 3 ежедневно дают соответственно 60, 50 и 45 тонн муки. Составить методом потенциалов оптимальный план перевозки муки четырем хлебозаводам, потребности которых равны 35, 25, 75 и 15 тонн в день. Стоимость перевозки одной тонны муки с мелькомбината № 1 хлебозаводам соответственно равна 3, 2, 4 и 1 д.е., с мелькомбината № 2 – 1, 2, 2, 4 д.е. и с мелькомбината № 3 – 5, 2, 4, 3 д.е.

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

1. Метод Гомори.
2. Транспортная параметрическая задача.
3. Транспортная задача с дополнительными условиями.
4. Экономический анализ задачи оптимального использования ресурсов.
5. Задачи выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера. Понятие о локальном и глобальном оптимуме. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования.
6. Динамические задачи выбора наиболее рационального маршрута доставки груза, оптимального распределения средств на расширение производства, определения оптимальной стратегии замены оборудования, формирования оптимальной программы производства с учетом запасов.

Примечание. Реферат должен содержать: титульный лист, содержание реферата, теоретический раздел должен быть подкреплен примерами и литература (перечень первоисточников которыми пользовались, в том числе и электронные сайты).

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Вариант 1

1. Задачи ЛП решить графическим и симплексным методом:

$$f = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 12, \\ x_2 &\le 8, \\ 2x_1 + x_2 &\le 20, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. Задачи ЛП решить методом искусственного базиса:

$$f = 2x_1 + x_2 \to \min;$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 6, \\ x_1 + 3x_2 &\ge 12, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Вариант 2

1. Задачи ЛП решить графическим и симплексным методом:

$$f = x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\le 7, \\ 2x_1 + x_2 &\le 7, \\ x_1 + 2x_2 &\le 2, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. Задачи ЛП решить методом искусственного базиса:

$$f = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$$

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 &= 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1,4}).$$

2. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Вариант 1

1. Построить двойственные задачи к следующим задачам линейного программирования, записать оптимальное решение двойственной задачи и, используя принцип соответствия между переменными, найти решение двойственной задачи.

$$f = 7x_1 - 5x_2 - 5x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 \le -3, \\ 6x_1 - x_3 \le 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 7x_3 \ge 1, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0.$$

2. Для приведенной ниже задачи записать двойственную задачу. Решить её симплексным методом.

$$f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11, \end{array}\right\}$$
$$x_j \ge 0 \, (j = \overline{1,3}).$$

Вариант 2

1. Построить двойственные задачи к следующим задачам линейного программирования, записать оптимальное решение двойственной задачи и, используя принцип соответствия между переменными, найти решение двойственной задачи.

$$f = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \to \max;$$
$$\left.\begin{array}{l} 3x_2 - +5x_3 \le 4, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = -3, \\ 4x_1 - x_3 \ge 2, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, \; x_3 \ge 0.$$

2. Для приведенной ниже задачи записать двойственную задачу. Решить её симплексным методом.

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min;$$
$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 3, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Вариант 1

В задаче ЛП требуется: а) составить математическую модель ТЗ; б) привести задачу к сбалансированному (закрытому) виду; в) построить опорный план методом «северо-западного угла»; г) построить опорный план методом «минимального элемента»; д) построить опорный план «методом потенциалов»; е) определить соответствующие значения целевых функций.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		80	70	90
A1	90	7	6	7
A2	80	6	4	4
A3	100	4	5	8

Вариант 2

В задаче ЛП требуется: а) составить математическую модель ТЗ; б) привести задачу к сбалансированному (закрытому) виду; в) построить опорный план методом «северо-западного угла»; г) построить опорный план методом «минимального элемента»; д) построить опорный план «методом потенциалов»; е) определить соответствующие значения целевых функций.

Поставщик	Запас груза	Потребитель		
		B1	B2	B3
		40	80	40
A1	60	3	5	7
A2	70	1	4	2
A3	50	5	3	5

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ (ЭКЗАМЕН)

1. Предмет и метод математического программирования. Понятия «модель» и «моделирование». Сущность процесса моделирования.
2. Общие принципы построения моделей. Классификация задач математического программирования. Математическая формулировка задачи математического программирования.
3. Формы записи задач математического программирования: общая, симметрические задачи, каноническая задача, векторно-матричная форма записи.
4. Постановка задачи линейного программирования (ЛП).
5. Матричная форма записи задач линейного программирования.
6. Каноническая и симметрическая запись задачи ЛП.
7. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи линейного программирования.
8. Симплекс-метод. Симплексные таблицы. Теоремы симплекс-метода.
9. Симплексный метод решения задачи линейного программирования.
10. Метод искусственного базиса решения задачи линейного программирования.
11. Теорема о конечности симплекс-метода.
12. Экономическая интерпретация элементов симплекс-таблицы.

13. Понятие двойственности.

14. Построение двойственных задач и их экономическая интерпретация.

15. Свойства двойственных задач. Теорема о разрешимости двойственных задач.

16. Критерий оптимальности планов двойственных задач.

17. Двойственный симплекс-метод.

18. Задача планирования технологий.

19. Задача планирования уровней производства.

20. Постановка транспортной задачи. Математическая модель транспортной задачи.

21. Методы составления плана решения транспортной задачи.

22. Алгоритм решения транспортной задачи.

23. Транспортная задача по критерию стоимости и задачи транспортного типа с максимизацией и минимизацией целевой функции.

24. Закрытая и открытая модель транспортной задачи.

25. Методы построения начального опорного плана решения.

26. Проверка плана перевозок на оптимальность.

27. Метод потенциалов для нахождения оптимального плана. Основные теоремы.

28. Улучшение плана перевозок.

29. Транспортная задача с дополнительными условиями.

30. Транспортная задача на сетях.

31. Постановка задач целочисленного программирования: общая задача о расписании.

32. Постановка задач целочисленного программирования: задача коммивояжера.

33. Постановка задач целочисленного программирования: задачи о разбиении.

34. Постановка задач целочисленного программирования: о покрытии и упаковке.

35. Постановка задач целочисленного программирования: задача о размещении оборудования.

36. Постановка задач целочисленного программирования: задача раскроя.

37. Методы ветвей и границ. Методы отсечений.

38. Задачи нелинейного программирования.

39. Постановка задачи нелинейного программирования и ее геометрическая интерпретация.

40. Метод множителей Лагранжа.

41. Экономический смысл множителей Лагранжа.

42. Задачи выпуклого программирования.

43. Выпуклые и вогнутые функции.

44. Задачи выпуклого программирования.

45. Теорема Куна-Таккера. Понятие о локальном и глобальном оптимуме.

46. Градиентные методы решения задач нелинейного программирования.

47. Приближенные методы решения задач нелинейного программирования с сепарабельными функциями.

48. Квадратичное программирование. Применение пакетов прикладных программ решения задач нелинейного программирования.

49. Динамическое программирование. Основные понятия.

50. Принцип оптимальности Беллмана, функция Беллмана.

51. Вычислительная схема метода динамического программирования.

52. Примеры задач динамического программирования.

53. Принципы динамического программирования и уравнения Беллмана.

54. Решение экономических задач методом динамического программирования.

55. Динамические задачи выбора наиболее рационального маршрута доставки груза.

56. Динамические задачи выбора наиболее экономичного распределения средств на расширение производства.

57. Динамические задачи выбора наиболее экономичного определения оптимальной стратегии замены оборудования.

58. Динамические задачи выбора наиболее экономичного определения оптимальной стратегии формирования оптимальной программы производства с учетом запасов.

59. Динамические задачи выбора наиболее экономичного формирования оптимальной программы производства с учетом запасов.

60. Сетевое моделирование. Применение пакета Network Optimization (сетевой оптимизации) для выбора наиболее экономичного маршрута доставки груза.

IV. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шилинец, В. А. Практикум по высшей математике : учеб.-метод. пособие / В. А. Шилинец [и др.]. – Минск : МИТСО, 2021. – Ч. 4. – 103 с.

2. Читая, Г. О. Эконометрика и экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Г. О. Читая [и др.] ; под ред. Г. О. Читая, С. Ф. Миксюк. – Минск : Белорус. гос. экономич. ун-т, 2018. – 510, [1] с.

3. Абрамов, Л. М. Математическое программирование : учеб. пособие для студентов вузов / Л. М. Абрамов, В. Ф. Капустин. – Ленинград : Изд-во Ленинград. ун-та, 1981. – 327 с.

4. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М. : Высш. шк., 1976. – 352 с.

5. Калихман, И. Л. Сборник задач поматематическому программированию : учеб. пособие для студентов экономических специальностей вузов / И. Л. Калихман. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1976. – 352 с.

6. Ганичева, А. В. Математическое программирование : учеб. пособие для СПО / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев. – СПб. : Лань, 2022. – 88 с.

7. Болотский, А. В. Математическое программирование и теория игр : учебное пособие для вузов / А. В. Болотский. – СПб. : Лань, 2022. –116 с.

8. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие / И. Л. Акулич. – СПб. : Лань, 2024. – 348 с.

9. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – СПб. : Лань, 2013. – 352 с.

10. Балдин, К. В. Математическое программирование : учебник / К. В. Балдин, Н. А. Брызгалов. – М. : Дашков и К, 2016. – 218 с.

11. Котов, В. П. Математическое программирование : учеб. пособие / В. П. Котов, Н. А. Адрицкая [и др.]. – СПб. : Лань, 2014. – 432 с.

12. Семакин, И. Г. Программирование, численные методы и математическое моделирование (для бакалавров) / И. Г. Семакин, О. Л. Русакова, Е. Л. Тарунин. – М. : КноРус, 2018. – 288 с.

13. Балдин, К. В. Математическое программирование : учебник / К. В. Балдин, Н. А. Брызгалов, А. В. Рукосуев. – М. : Дашков и К, 2013. – 220 с.

14. Юденков, А. В. Математическое программирование в экономике : учебное пособие / А. В. Юденков. – М. : Финансы и статистика, 2010. – 240 с.

15. Димитрин, Ю. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие / Ю. Димитрин. – СПб. : Лань П, 2016. – 352 с.

16. Юрьева, А. А. Математическое программирование : учеб. пособие / А. А. Юрьева. – СПб. : Лань, 2014. – 432 с.