Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО»

Факультет экономический
Кафедра информационных технологий

СОГЛАСОВАНО	СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой	Декан факультета
____________О.Б.Хорошко	____________А.В.Ковтунов
27.02. 2026 г.	13.04. 2026 г.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

для специальности 6-05-0611-01 Информационные системы и технологии

Составители: Г.Е.Хурсевич, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры информационных технологий учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»

Рассмотрено и рекомендовано к утверждению на заседании кафедры информационных технологий учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет МИТСО»
27. 02. 2026г., протокол № 7

Утверждено на заседании научно-методического совета учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»
13. 04. 2026г., протокол № 4

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

кафедра физики и методики преподавания физики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»;

С.И.Василец, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»

Регистрационный № УД-052-26/э

Регистрационное свидетельство № 1272647219 от 19.05.2026 г.

АКТУАЛИЗИРОВАН

заседание кафедры ____
________________________________ учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет МИТСО»
__________20______, протокол №______

заседание научно-методического совета учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»
_____________ 20__ г., протокол № ____

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учреждение образования Федерации профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
учреждения образования Федерации
профсоюзов Беларуси
«Международный университет «МИТСО»

_______________Ю.Л.Шевцов

_11.07.__ 2023 г.

Регистрационный № УД-221/01-23/уч.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности

6-05-0611-01 Информационные системы и технологии

2023 г.

Контрольный экземпляр

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта высшего образования ОСВО 6-05-0611-01-2023 (общее высшее образование) для специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии», типовой учебной программы «Математический анализ», утвержденной 28.03.2022 г. регистрационный № ТД-I.1555/тип., и учебного плана указанной специальности учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»

СОСТАВИТЕЛЬ:

Г.Е.Хурсевич, профессор кафедры бизнес-анализа и математического моделирования учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой бизнес-анализа и математического моделирования учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»
(протокол № 12 от 24.05.2023);

Научно-методическим советом учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО»
(протокол № 8 от 14.07.2023)

Нормоконтроль
ведущий специалист
УМУ
Г.Д. Лагунович

Зав. библиотекой
/Ю.О.Бабарикина/

I. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Математический анализ» входит составной частью в систему дисциплин, обеспечивающих подготовку специалистов по специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии (в экономике), относится к модулю «Математика» и изучается в тесной взаимосвязи с учебными дисциплинами «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Физика», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Эконометрика», «Экономико-математические методы и модели».

Целью изучения учебной дисциплины «Математический анализ» является: освоение основных методов математического анализа, необходимых для изучения общетеоретических и специальных дисциплин; развитие логического и алгоритмического мышления; повышение общей математической культуры; формирование навыков формализации моделей реальных процессов; анализа систем, процессов и явлений при поиске оптимальных решений и выборе наилучших способов реализации этих решений; выработка исследовательских навыков и умений самостоятельного анализа прикладных задач.

Основными задачами учебной дисциплины являются:

изучение теоретических основ математического анализа, приемов и методов исследования и решения математически и логически формализованных задач с помощью положений математического анализа;

формирование культуры мышления, умения демонстрировать базовые знания математического анализа, и приобретать новые научные и профессиональные знания по математическому анализу;

формирование навыков анализа фундаментальных и прикладных теорий, концепций, фактов, а также построения математических моделей изучаемых процессов с помощью методов математического анализа.

Освоение учебной дисциплины «Математический анализ» должно обеспечить у обучающихся формирование универсальных и базовых профессиональных компетенций.

Требования к **универсальным** компетенциям специалиста:

УК-12 – Обладать навыками творческого аналитического мышления.

Требования к **базовым профессиональным** компетенциям специалиста:

БПК-2 – Применять методы дифференциального и интегрального исчислений, аппарат теории степенных и функциональных рядов при построении и исследовании математических моделей прикладных задач.

В результате изучения дисциплины обучающиеся должны:

знать:

основные положения дифференциального и интегрального исчислений;

основы теории рядов и обыкновенных дифференциальных уравнений;

основные понятия, методы и приемы математического анализа;

приемы построения моделей реальных процессов методами математического анализа;

фундаментальные основы математического анализа, которые будут использоваться в профессиональной деятельности;

уметь:

дифференцировать и интегрировать функции;

решать простейшие дифференциальные уравнения, интегрируемые в квадратурах;

разлагать функции в степенные ряды и ряды Фурье;

ориентироваться в справочной и научной литературе по математическому анализу;

применять методы математического анализа в профессиональной деятельности;

использовать математическую логику и культуру мышления, характерные для математического анализа, при формировании суждений по соответствующим профессиональным проблемам;

строить математические модели исследуемых процессов;

владеть:

методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений;

навыками творческого аналитического мышления.

умением читать и анализировать учебную литературу;

способностью с помощью понятий математического анализа интерпретировать и комментировать получаемую информацию;

методами математического анализа и моделирования при решении профессиональных задач;

инструментарием математического анализа для решения задач в своей предметной области;

навыками решения задач и проблем из различных областей математики, которые требуют знаний из теории математического анализа.

Распределение аудиторных часов по видам занятий и семестрам.
Виды и формы аттестации

<table>
<tr><th rowspan="3">Семестр</th><th colspan="7">Количество академических часов</th><th rowspan="3">Форма текущей аттестации</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Всего</th><th rowspan="2">Аудит.</th><th colspan="5">Из них</th></tr>
<tr><th>Лекции</th><th>Лабор. занятия</th><th>Практ. занятия</th><th>Семи-нары</th><th>УСР</th></tr>
<tr><td colspan="9">Очная (дневная) форма получения высшего образования</td></tr>
<tr><td>1</td><td>120</td><td>68</td><td>30</td><td>–</td><td>30</td><td>–</td><td>8</td><td>зач.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>210</td><td>108</td><td>42</td><td>–</td><td>50</td><td>–</td><td>16</td><td>экз.</td></tr>
<tr><td>Всего</td><td>330</td><td>176</td><td>72</td><td>–</td><td>80</td><td>–</td><td>24</td><td></td></tr>
</table>

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Введение в математический анализ

Тема 1.1. Множества

Множества и операции над ними. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Свойства действительных чисел, операции над ними. Геометрическое изображение действительных чисел. Модуль действительного числа, его свойства. Числовые промежутки. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Грани ограниченного множества. Различные формулировки свойства непрерывности континуума. Понятие об аксиоматике множества действительных чисел.

Тема 1.2. Функции

Понятие функции. График функции. Способы задания функции. Арифметические действия над функциями. Композиция функций. Обратная функция. Сужение функции. Классификация функций по свойствам (четность, периодичность, монотонность, ограниченность). Основные числовые функции и их графики.

Тема 1.3. Предел числовой последовательности

Понятие числовой последовательности. Понятие предела числовой последовательности. Единственность предела сходящейся числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Бесконечно большие последовательности. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями. Теорема о пределах последовательностей. Предельный переход в неравенствах. Теорема о пределе промежуточной последовательности. Существование предела ограниченной монотонной последовательности. Число e как предел последовательности. Натуральные логарифмы.

Тема 1.4. Предел функции

Предел функции в точке и на бесконечности. Перенос основных теорем о пределах последовательностей на функции. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Первый замечательный предел. Предел сложной функции. Второй замечательный предел. Сравнение бесконечно малых функций. Понятие о пределе функции по множеству.

Тема 1.5. Непрерывные функции и их свойства

Непрерывность функции в точке (различные определения и их равносильность). Локальные свойства непрерывной функции (сохранение знака и ограниченность в окрестности точки непрерывности). Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность композиции непрерывных функций. Точки разрыва, их классификация. Непрерывность функции на множестве. Односторонняя непрерывность. Теоремы Больцано-Коши. Теоремы Вейерштрасса. Решение уравнений методом половинного деления, решение неравенств методом интервалов. Примеры итерационного решения уравнений. Существование, монотонность и непрерывность функции, обратной для непрерывной и монотонной функции. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема 2.1. Производные и дифференциал

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная, ее геометрический и механический смысл. Существование производной и непрерывность функции в точке. Производная суммы, произведения, частного. Производная сложной и обратной функций. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Понятие дифференцируемости функции. Дифференцируемость и существование производной в точке. Дифференциал, его геометрический и механический смысл. Дифференциал суммы, произведения и частного. Дифференциал сложной функции и инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Дифференциалы высших порядков. Параметрическое задание функции, дифференцирование параметрически заданных функций.

Тема 2.2. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции. Максимум и минимум. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия максимума и минимума. Нахождение наибольших и наименьших значений функции. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций. Формула Тейлора. Использование дифференциального исчисления при доказательстве тождеств и неравенств. Методы хорд и касательных решения уравнений.

Раздел 3. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 3.1. Неопределенный интеграл

Задача восстановления функции по ее производной или дифференциалу. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Формула интегрирования по частям, замена переменной в интеграле. Интегрирование рациональных, простейших иррациональных и трансцендентных функций. Неинтегрируемые в классе элементарных функций функции.

Тема 3.2. Определенный интеграл

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интеграл как предел интегральной суммы. Необходимое условие интегрируемости функции. Основные свойства определенного интеграла. Нижние и верхние суммы Дарбу и их свойства. Классы интегрируемых функций. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Существование первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле. Приближенное вычисление интегралов.

Тема 3.3. Приложения определенного интеграла

Квадрируемая фигура и ее площадь, необходимое и достаточное условие квадрируемости. Квадрируемость криволинейной трапеции. Вычисление площадей фигуры, ограниченных параметрически заданными кривыми, и кривыми, заданными в полярных координатах. Спрямляемые дуги, вычисление длины дуги. Кубируемые тела и их объемы. Вычисление объема тела по площадям параллельных сечений. Принцип Кавальери. Объем тела вращения. Вычисление объемов пирамиды, конуса, шара. Площадь поверхности вращения. Вычисление статических моментов и координат центра тяжести кривой и плоской фигуры. Теоремы Гюльдена.

Тема 3.4. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы первого и второго рода. Абсолютная сходимость. Признаки сходимости.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Тема 4.1. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность

n-мерное евклидово пространство. Ограниченные и замкнутые множества. Связность. Понятие области. Граница области. Действительная функция n действительных переменных как функция точки n-мерного евклидова пространства. График функции двух переменных. Линии уровня. Предел и непрерывность. Непрерывные числовые функции на компакте и их свойства.

Тема 4.2. Частные производные и дифференциал

Частные производные, их геометрический смысл. Дифференцируемость. Достаточное условие дифференцируемости. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Дифференциал. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Использование дифференциала в приближенных вычислениях. Дифференцирование сложной функции, инвариантность формы первого дифференциала. Производная функции по направлению. Градиент функции и его свойства. Векторная функция скалярного аргумента, её дифференцирование. Частные производные высших порядков и условия их независимости от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Тема 4.3. Экстремум функции нескольких переменных

Максимумы и минимумы функции нескольких переменных, необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума для функции двух переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений непрерывной функции в замкнутой ограниченной области. Условные экстремумы.

Тема 4.4. Неявное задание функций

Неявно заданные функции одной и двух переменных, их непрерывность и дифференцирование. Понятие о функциях, заданных системой уравнений, их дифференцирование. Определитель Остроградского-Якоби.

Раздел 5. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Тема 5.1. Двойные и тройные интегралы

Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах. Геометрические и физические приложения двойного интеграла. Тройной интеграл, его свойства и вычисление. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах. Приложение тройного интеграла.

Тема 5.2. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл по длине дуги, его существование, свойства и вычисление. Задача о работе плоского силового поля. Криволинейный интеграл по координатам, его существование, свойства и вычисление. Формула Грина и следствия из неё. Условия независимости интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по её полному дифференциалу. Векторное поле, его дивергенция и ротор. Циркуляция векторного поля.

Тема 5.3. Поверхностные интегралы

Понятия о поверхностных интегралах. Поток векторного поля через поверхность. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса, её векторная запись.

Раздел 6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Тема 6.1. Дифференциальные уравнения первого и высших порядков

Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения. Решения дифференциальных уравнений. Начальные условия. Дифференциальное уравнение первого порядка как поле направлений. Теорема существования и единственности решения (без доказательства). Понятие общего решения. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной (с разделяющимися переменными; уравнения, однородные относительно переменных; линейные уравнения первого порядка; в полных дифференциалах). Понятие об особом решении. Дифференциальные уравнения высших порядков. Случаи понижения порядка.

Тема 6.2. Линейные дифференциальные уравнения

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Фундаментальная система частных решений однородного линейного уравнения. Структура общего решения. Решение линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Нахождение частных решений неоднородного уравнения. Метод вариаций произвольных постоянных.

Раздел 7. Ряды

Тема 7.1. Числовые ряды

Понятие числового ряда, частичная сумма ряда, сумма и остаток ряда. Сходимость и рассходимость рядов. Геометрическая прогрессия. Гармонический ряд. Сложение рядов и умножение ряда на число. Необходимое условие сходимости. Необходимое и достаточное условия сходимости числовой последовательности и ряда (критерий Коши).

Положительные ряды. Необходимый и достаточный признак сходимости положительных рядов. Достаточные признаки сходимости (признаки сравнения, Даламбера и Коши, интегральный признак Коши).

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Ряды с произвольными членами. Абсолютная и условная сходимость рядов. Перестановка членов ряда. Умножение рядов.

Тема 7.2. Функциональные последовательности и ряды

Функциональная последовательность и функциональный ряд. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признаки равномерной и абсолютной сходимости ряда. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда, почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

Тема 7.3. Степенные ряды

Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда.

Тема 7.4. Ряд Тейлора

Задача о разложении функции в степенной ряд. Единственность разложения. Ряд Тейлора. Условия разложимости функций в ряд Тейлора. Разложение в степенные ряды функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\mathrm{arctg}\, x$, $(1+x)^{\alpha}$. Приложения степенных рядов.

Тема 7.5. Тригонометрические ряды

Тригонометрические системы функций. Тригонометрический ряд Фурье для периодических функций с периодом 2π и для периодических функций с произвольным периодом. Разложение четных и нечетных периодических функций в тригонометрический ряд Фурье. Теорема Дирихле о сходимости тригонометрического ряда Фурье. Разложение функций, заданных на произвольном интервале, в тригонометрический ряд Фурье. Разложение функций, заданных на интервале вида $(0, l)$, в тригонометрический ряд Фурье только по косинусам или только по синусам. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье.

Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональным системам функций. Интеграл Фурье. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье.

III. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная (дневная) форма получения высшего образования

№ раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия		
1	2	3	4	5	6	7	8
	I семестр						
1.	**Введение в математический анализ**	**12**	**12**				
1.1.	Множества	2	2				УО
1.2.	Функции	2	2				ПО
1.3.	Предел числовой последовательности	2	2				ЗТТ
1.4.	Предел функции	4	4				КР
1.5.	Непрерывные функции и их свойства	2	2				ПО
2.	**Дифференциальное исчисление функций одной переменной**	**8**	**8**			**4**	
2.1.	Производные и дифференциал	4	4			2	ЗТТ
2.2.	Основные теоремы дифференциального исчисления	4	4			2	КР
3.	**Интегральное исчисление функций одной переменной**	**10**	**10**			**4**	
3.1.	Неопределенный интеграл	4	4			2	ЗТТ
3.2.	Определенный интеграл	4	2				ЗТТ
3.3.	Приложения определенного интеграла	2	2				ПО
3.4.	Несобственные интегралы		2			2	КР
	Всего в I семестре	**30**	**30**			**8**	**зач.**
	II семестр						
4.	**Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**	**12**	**14**			**2**	
4.1.	Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность.	4	4				УО
4.2.	Частные производные и дифференциал	4	4				ПО
4.3.	Экстремум функции нескольких переменных	4	4				ЗТТ
4.4.	Неявное задание функций		2			2	КР

1	2	3	4	5	6	7	8
5.	**Интегральное исчисление функций нескольких переменных**	**6**	**8**			**4**	
5.1.	Двойные и тройные интегралы	4	4			2	ЗТТ
5.2.	Криволинейные интегралы	2	4				ЗТТ
5.3.	Поверхностные интегралы					2	УО
6.	**Обыкновенные дифференциальные уравнения**	**10**	**12**			**4**	
6.1.	Дифференциальные уравнения первого и высших порядков	6	6			2	ЗТТ
6.2.	Линейные дифференциальные уравнения	4	6			2	КР
7.	**Ряды**	**14**	**16**			**6**	
7.1.	Числовые ряды	4	4				ЗТТ
7.2.	Функциональные последовательности и ряды	2	2			2	УО
7.3.	Степенные ряды	2	4				ПО
7.4.	Ряд Тейлора	2	2			2	РПЗ
7.5.	Тригонометрические ряды	4	4			2	КР
	Всего во II семестре	**42**	**50**			**16**	**экз.**
	Всего	**72**	**80**			**24**	

IV. ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бугров, Я. С. Высшая математика: в 3 т. : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Люберцы : Юрайт, 2016. – Т. 1: в 2 кн. Дифференциальное и интегральное исчисление. – 501 с.
2. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. : учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Люберцы : Юрайт, 2016. – Т. 3 : в 2 кн. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – 507 с.
3. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М. : МЦНМО, 2018. – Ч. 1. – 564 с.
4. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М. : МЦНМО, 2017. – Ч. 2. – 676 с.
5. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов : учебник / Н. Ш. Кремер и др. – М. : Юнити, 2017. – Ч. 2. – 448 с.
6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике (полный курс) / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2017. – 608 с.
7. Шилинец, В. А. Практикум по высшей математике : учеб.-метод. пособие: в 4 ч. / В. А. Шилинец, П. И. Кибалко, В. В. Подгорная. – Минск : Междунар. ун-т «МИТСО», 2018. – Ч. 2. – 232 с.
8. Шипачев, В. С. Математический анализ. Теория и практика: учеб. пособие / В. С. Шипачев. – М. : Инфра-М, 2018. – 416 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

9. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – СПб. : Лань, 2016. –492 с.
10. Драгомиров, П. Н. Краткий курс математического анализа : учеб. пособие / П. Н. Драгомиров. – СПб. : Лань, 2016. – 736 с.
11. Леваков, А. А. Математический анализ : учеб. пособие / А. А. Леваков. – Минск : БГУ, 2014. – 383 с.
12. Лурье, И. Г. Высшая математика. Практикум : учеб. пособие / И. Г. Лурье, Т. П. Фунтикова. – М. : Вузовский учебник, 2018. – 256 с.
13. Кастрица, О. А. Высшая математика для экономистов : учеб. пособие / О. А. Кастрица. – М. : Инфра-М, 2018. – 104 с.
14. Краснова, С. А. Математический анализ для экономистов : в 2 ч. / С. А. Краснова, В. А. Уткин. – Люберцы : Юрайт, 2016. – Ч. 1: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – 298 с.
15. Краснова, С. А. Математический анализ для экономистов : в 2 ч. / С. А. Краснова, В. А. Уткин. – Люберцы : Юрайт, 2016. – Ч. 2: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – 315 с.
16. Хинчин, А. Я. Краткий курс математического анализа / А. Я. Хинчин. – М. : Ленанд, 2018. – 632 с.
17. Ячменёв, Л. Т. Высшая математика : учебник / Л. Т. Ячменёв. – М.: Риор, 2018. – 752 с.

СРЕДСТВА ДИАГНОСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Диагностика результатов учебной деятельности обучающихся осуществляется в ходе проведения всех видов занятий, самостоятельной работы и текущей аттестации по учебной дисциплине.

Основными формами контроля знаний по учебной дисциплине являются:

1. устные опросы УО;
2. письменные опросы (летучки) ПО;
3. коллоквиумы К;
4. устные доклады УД;
5. контрольные работы КР;
6. тесты (задания тестового типа) ЗТТ;
7. решение практических задач РПЗ.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ И КОНТРОЛЬНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ УСР

№ темы, (раздела)	Тема УСР	Кол-во часов	Метод. обеспечение	Форма контроля
1 курс, 1 семестр (8 часов)				
2.1.	Производные и дифференциал	2	Интернет-ресурсы	РПЗ, УО
2.2.	Основные теоремы дифференциального исчисления	2	Интернет-ресурсы	РПЗ, УО
3.1.	Неопределенный интеграл	2	Интернет-ресурсы	РПЗ, УО
3.4.	Несобственные интегралы	2	Интернет-ресурсы	РПЗ, УО
1 курс, 2 семестр (16 часов)				
4.4.	Неявное задание функций	2	Интернет-ресурсы	РПЗ, УО
5.1.	Двойные и тройные интегралы	2	Интернет-ресурсы	ЗТТ
5.3.	Поверхностные интегралы	2	Интернет-ресурсы	РПЗ
6.1.	Дифференциальные уравнения первого и высших порядков	2	Интернет-ресурсы	ЗТТ
6.2.	Линейные дифференциальные уравнения	2	Интернет-ресурсы	ЗТТ
7.2.	Функциональные последовательности и ряды	2	Интернет-ресурсы	РПЗ, УО
7.4.	Ряд Тейлора	2	Интернет-ресурсы	РПЗ, УО
7.5.	Тригонометрические ряды	2		РПЗ, УО

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ТЕКУЩЕЙ АТТЕСТАЦИИ

I семестр (зачет)

1. Понятие функции. Способы задания функции. График функции. Обратная функция. Элементарные функции.
2. Числовая последовательность и ее предел.
3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
4. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число *e*.
5. Предел функции в точке (по Коши и по Гейне) и на бесконечности.
6. Односторонние пределы функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
7. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность.
8. Точки разрыва функций и их классификация. Непрерывность элементарных функций.
9. Замечательные пределы.
10. Функции, непрерывные на отрезке и их свойства.
11. Производная функции, ее геометрический и физический смысл.
12. Основные правила дифференцирования.
13. Производная сложной и обратной функции.
14. Производные элементарных функций. Логарифмическое дифференцирование.
15. Дифференцируемость функций в точке.
16. Дифференциал функции, его геометрический смысл и применение в приближенных вычислениях.
17. Производные высших порядков. Формула Лейбница.
18. Дифференциалы высших порядков.
19. Дифференцирование параметрически заданных функций. Дифференцирование функций, заданных неявно.
20. Теорема Ферма. Основные теоремы дифференциального исчисления: Ролля, Лагранжа, Коши.
21. Правила Лопиталя и их применение для раскрытия неопределенностей.
22. Признаки возрастания и убывания функции.
23. Необходимое и достаточные условия существования экстремума.
24. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке.
25. Выпуклость и точки перегиба. Достаточное условие выпуклости. Необходимое условие перегиба. Достаточные условия перегиба.
26. Вертикальные и наклонные асимптоты графика функции.
27. Общая схема исследования поведения функции и построение графика

функции.

28. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
29. Таблица основных неопределенных интегралов.
30. Методы вычисления неопределенных интегралов: непосредственное интегрирование, подстановкой (замена переменной), введение множителя под знак дифференциала, интегрирование по частям.
31. Интегрирование рациональных функций.
32. Интегрирование некоторых иррациональных и тригонометрических выражений.
33. Определенный интеграл и его свойства.
34. Определенный интеграл с переменным верхним пределом и его дифференцирование. Формула Ньютона-Лейбница.
35. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Интеграл от периодических, четных и нечетных функций.
36. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода.

II семестр (экзамен)

1. Понятие функции многих переменных (ФМП). Линии и поверхности уровня ФМП.
2. Предел ФМП в точке, его свойства. Непрерывность ФМП в точке.
3. Частные производные и дифференцируемость ФМП.
4. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Дифференцирование сложных функций.
5. Производная по направлению. Градиент функции и его смысл.
6. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
7. Дифференциалы высших порядков.
8. Понятие локального экстремума ФМП. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума.
9. Условный экстремум ФМП. Метод множителей Лагранжа.
10. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной ФМП в замкнутой области.
11. Определение двойного интеграла, его свойства, геометрические и физические приложения.
12. Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат.
13. Тройной интеграл, его определение, геометрические и физические приложения. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.
14. Замена переменных в двойных интегралах. Двойной интеграл в полярной системе координат.
15. Замена переменных в тройных интегралах. Тройной интеграл в цилиндрической и сферической системах координат.
16. Задачи, приводящие к криволинейному интегралу 1-го рода. Свойства и вычисление криволинейных интегралов 1-го рода.
17. Криволинейный интеграл 2-го рода, его механический смысл.

Свойства и вычисление криволинейных интегралов 2-го рода.

18. Формула Грина.

19. Независимость криволинейных интегралов 2-го рода от пути интегрирования. Восстановление функции по ее полному дифференциалу.

20. Поверхностный интеграл 1-го рода, его вычисление, свойства и приложения.

21. Поверхностный интеграл 2-го рода, его физический смысл, вычисление и свойства.

22. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса.

23. Скалярные и векторные поля.

24. Поток векторного поля через ориентированную поверхность. Поток векторного поля через замкнутую поверхность.

25. Дивергенция векторного поля, ее свойства, вычисление и физический смысл.

26. Циркуляция векторного поля.

27. Ротор векторного поля, его свойства, вычисление и физический смысл.

28. Основные понятия теории дифференциальных уравнений (ДУ). ДУ 1-го порядка, задача Коши. Общее и частное решение ДУ.

29. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: с разделяющимися переменными, однородные.

30. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: линейные, Бернулли, в полных дифференциалах.

31. Основные понятия о ДУ высших порядков. Задача Коши.

32. Уравнения, допускающие понижение порядка.

33. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков и свойства их решений. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.

34. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

35. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Структура общего решения, принцип суперпозиции решений.

36. Метод вариации произвольных постоянных.

37. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

38. Числовой ряд и его сумма.

39. Действия над рядами. Простейшие свойства числовых рядов. Необходимое условие сходимости ряда.

40. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: интегральный признак.

41. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признаки сравнения.

42. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признаки Даламбера и Коши.

43. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка ряда.

44. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость.

45. Функциональные ряды, область сходимости и сумма ряда.

46. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

47. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: теорема о непрерывности суммы.

48. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: теоремы о почленном дифференцировании и почленном интегрировании.

49. Степенные ряды, теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.

50. Свойства степенных рядов.

51. Ряды Тейлора. Достаточные условия представления функции рядом Тейлора.

52. Разложение основных функций в ряд Маклорена.

53. Применение рядов Тейлора в приближенных вычислениях.

54. Приложение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений и вычислению определенных интегралов.

55. Тригонометрические системы функций. Тригонометрический ряд Фурье для периодических функций с периодом 2π и для периодических функций с произвольным периодом.

56. Разложение четных и нечетных периодических функций в тригонометрический ряд Фурье. Теорема Дирихле о сходимости тригонометрического ряда Фурье.

57. Разложение функций, заданных на произвольном интервале, в тригонометрический ряд Фурье.

58. Разложение функций, заданных на интервале вида $(0, l)$, в тригонометрический ряд Фурье только по косинусам или только по синусам.

59. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье.

60. Ортогональные системы функций. Ряды Фурье по ортогональным системам функций.

61. Интеграл Фурье. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье.

V. ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Основы алгоритмизации и программирования	Кафедра информационных технологий	Предложений нет	
Эконометрика	Кафедра математики	Предложений нет	
Линейная алгебра и аналитическая геометрия	Кафедра математики	Предложений нет	
Экономико-математические методы и модели	Кафедра математики	Предложений нет	

VI. ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ на 20_____/20_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры ________________________________(протокол № ____от________20___г.)

Заведующий кафедрой

______________________________ ____________________ ________________________________
(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

______________________________ ____________________ ________________________________
(ученая степень, ученое звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

I. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Математический анализ» изучается студентами специальности 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии» на протяжении первых двух семестров обучения в университете.

Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Математический анализ» (далее – ЭУМК) подготовлен в соответствии с учебной программой учреждения образования Федерации профсоюзов Беларуси «Международный университет «МИТСО» по дисциплине «Математический анализ» для указанной специальности.

Цель ЭУМК – управление и самоуправление учебной деятельность по развитию компетентностей обучающихся в процессе освоения ими учебной дисциплины «Математический анализ».

ЭУМК раскрывает требования к содержанию изучаемой дисциплины, к образовательным результатам и средствам их достижения и оценки; обеспечивает эффективное освоение обучающимися учебного материала; является средством управления самостоятельной работы обучающихся.

Основными структурными элементами ЭУМК являются:

учебная программа по дисциплине;

теоретический раздел, включающий лекционные материалы по дисциплине;

практический раздел, содержащий материал для проведения практических занятий;

раздел контроля знаний, содержащий задания для управляемой самостоятельной работы студентов; тестовые задания по высшей математике, которые охватывают основные типы задач указанной дисциплины, и материалы для проведения контрольных работ по разделам изучаемой студентами учебной дисциплины.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК. Освоение материала по каждому из рассматриваемых разделов рекомендуется начинать с изучения соответствующего лекционного материала («Теоретический раздел»), после чего следует проработать решенные задачи и примеры, которые можно назвать типовыми. Ознакомление с ними позволит обучающемуся при самой минимальной помощи со стороны преподавателя овладеть основными методами решения задач изучаемого раздела. Далее можно перейти к самостоятельному решению предложенных упражнений и заданий («Практический раздел»).

Задания для управляемой самостоятельной работы студентов («Раздел контроля знаний») позволят преподавателю организовать эффективную самостоятельную работу обучающихся по дисциплине «Математический анализ».

Для проверки знаний студентов ЭУМК содержит тестовые задания и материалы для проведения контрольных работ («Раздел контроля знаний»).

I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

РАЗДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ТЕМА 1.1. МНОЖЕСТВА

§1. Основные понятия теории множеств

1. Понятие множества

Множество – совокупность объектов любой природы, объединённых по какому-либо признаку. Георг Кантор (1845 -1918) – создатель теории множеств.

Объекты, составляющие множество, называются его **элементами**.

Множество принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, ..., а элементы множества – строчными a, b, c, d, ...

Если объект *a* принадлежит множеству *M (a E M)*

Если объект b не принадлежит множеству *M* (b *£ M)*

Множества, элементы которых являются числа, называются **числовыми множествами** (K, N, Z, C, [a, b], (a, b)).

2. Способы задания множеств

Множество считается заданным, если о любом объекте можно сказать принадлежит он этому множеству или нет.

Существует несколько способов задания множества:

1. Перечисление всех его элементов A = {a, b, c, d}.

- Порядок описания элементов множества не имеет значения.
- Множество не может содержать одинаковых элементов. (Множество букв в слове "колобок" – {к, о, л, б}).
- Применение многоточия (...) как сокращение записи (C = {2,4,6, ..., 34})

2. Указание характеристического свойства элементов множества.

Характеристическое (отличимое) свойство может быть записано словесно или символьно. (A – множество натуральных чисел, которые больше –4 и меньше 5, $A = \{x|x \in N, -4 < x < 5\}$).

3. Алгоритмический: указание порождающей процедуры для элементов множества. (Множество F чисел Фибоначчи включает натуральные числа: 1, 2, 3, 5, 8, ... или $F = \{ x \mid x_1 = 1, x_2 = 2, x_i = x_{i-1} + x_{i-2}, i = 3,4,...\}$)

4. Аналитический: с помощью операций над уже известными множествами

4. Конечное множество. Пустое множество. Мощность множества

Множество содержит конечное число элементов – **конечное**.

Множество которое не содержит ни одного элемента – **пустое множество** (0).

Мощность множества или **кардинальное число** -величина, которая характеризует число его элементов. Мощность X – |X|.

Мощность конечного множества = количеству его элементов.

Множество состоящее из n элементов, будем называть ***n*-элементным множеством**.

Мощность пустого множества = 0 (|∅| = 0).

Мощность множества – это не всегда число. Для бесконечных множеств это специальные символы.

5. Упорядоченное множество

Множество X называется **упорядоченным**, если на нем задано бинарное отношение порядка: один элемент множества предшествует другому.

Обозначается "<” и обладает свойствами:

1. Для любых элементов a, $b \in X$ существует (∃) только одно из двух отношений: a < b или b < a.

2. $\forall a, b, c \in X$ из отношений $a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$.

Упорядоченное множество будем записывать в виде последовательности его элементов слева направо и заключать ее в круглые скобки.

Пример: $X_1 = (2,4,5,7,1), X_2 = (1,4,5,7,2)$.

Теорема. Любое конечное множество, в котором 2 и больше элементов можно упорядочить, причем несколькими способами.

Замечание. Пустое множество считается упорядоченым.

§2. Отношения между множествами

1. Основные понятия

Если множество A и B имеют общие элементы, т.е. элементы, принадлежащие одновременно A и B, то говорят, что эти множества **пересекаются (отношение пересечения).**

Если A и B не имеют общих элементов, то говорят, что они **не пересекаются (отношение непересечения).**

Пусть множества A и B не пересекаются, рассмотрим частные случаи:

1. Если множества *A* и *B* пересекаются, в множестве *A* есть элементы ∉ *B,* а в B есть элементы ∉ *A,* то говорят что они **частично пересекаются (отношение частичного пересечения)**.

2. Если каждый элемент множества B ∉ A, то говорят, что множество *B* **включено** в множество *A (B является подмножеством* A, *B* ⊂ *A).*

3. Если множества *A* и *B* состоят из одних и тех же элементов, то они называются равными (A = *B).*

Теорема. Если *A* ⊂ *B* и *B* ⊂ *A,* то *A* = *B.*

2. Множество подмножеств произвольного множества

Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества. И любое множество является подмножеством самого себя.

Множества A и $\emptyset$ называются **несобственными** подмножествами множества А, все остальные – **собственными** подмножествами множества *A*.

Универсальное множество–множество, содержащее все объекты и все **множества**. При решении определенной задачи рассматриваются только его подмножества. Обозначается: $\mathbb{U}$.

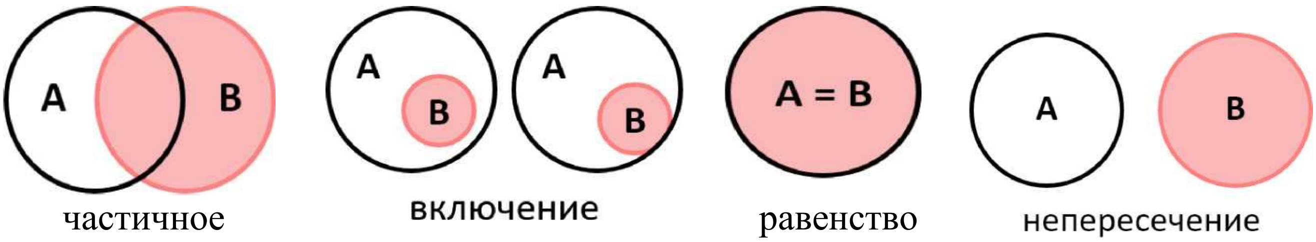
Теорема. Если множество *A* содержит *n* элементов, то у него 2^n различных подмножеств.

Док-во: Допустим у нас имеется множество из *n*-элементов. При составлении подмножеств первый элемент может принадлежать подмножеству или не принадлежать, т.е. первый элемент можем выбрать двумя способами, аналогично для всех остальных элементов (всего *n*-элементов), каждый можем выбрать двумя способами, и по правилу умножения получаем: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^n$.

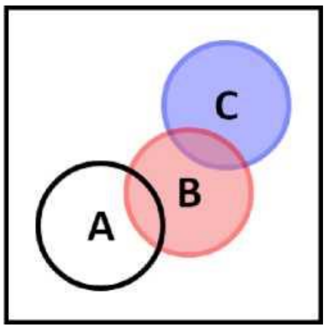
3. Диаграммы Эйлер-Венна

Отношения между множествами наглядно представляют с помощью диаграмм (круги Эйлера).

Внутренние точки кругов считаются элементами множества не зависимо от их количества.



Универсальное множество в задаче обозначается прямоугольником.



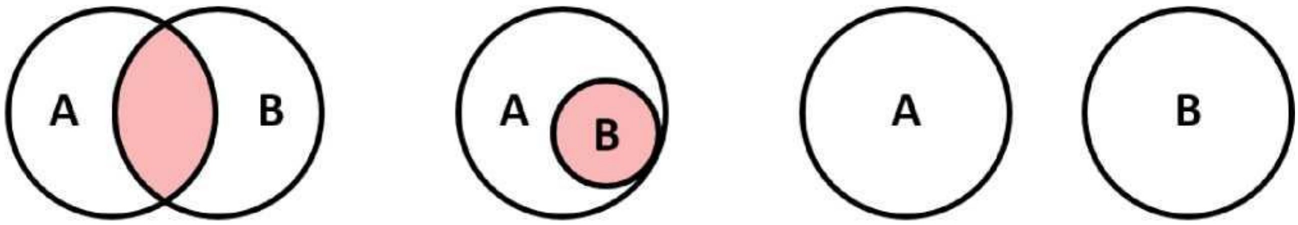
§3. Операции над множествами и их свойства

1. Пересечение множеств

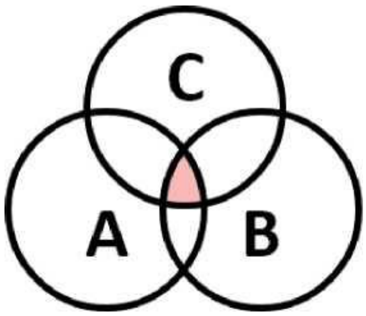
Пересечение множеств A и B называется множество содержащее те и только те элементы, которые одновременно принадлежат множеству A и B.

Обозначение: $A \cap B$

Если $A \subset B$, то $A \cap B = B$.



Пересечением 3-ех множеств *A, B* и *C* называется множество, содержащие те и только те элементы, которые одновременно принадлежат *A, B* и *C*.

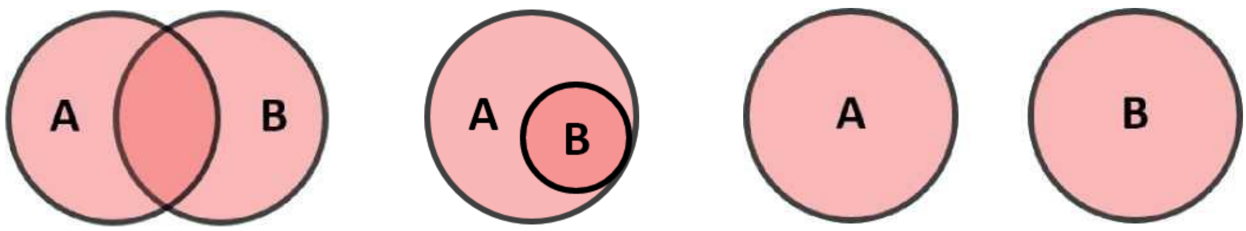


2. Объединение множеств

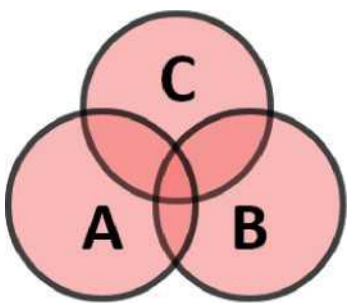
Объединением множеств *A* и *B* называется множество содержащее те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A* и *B.*

Обозначение:$A \cup B$

Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$.



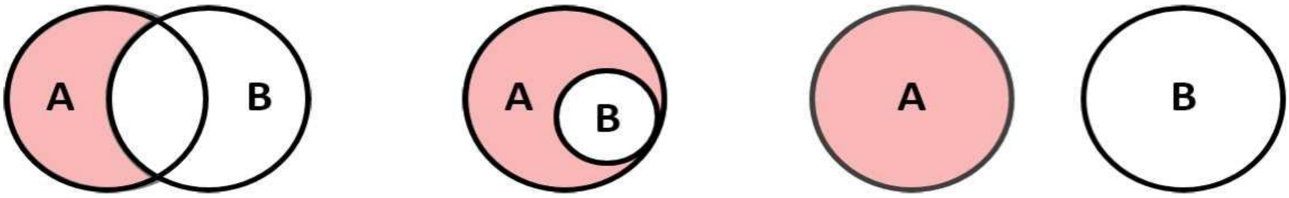
Объединение 3-ех множеств *A, B* и *C* называется множество, содержащие те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A, B* и *C*.



3. Разность множеств

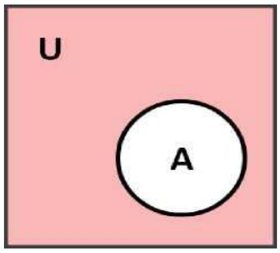
Разность множеств A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат A и не принадлежат B.

Обозначение: $A \setminus B$



Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется дополнением множества В до множества A и обозначается $\bar{B}_A$.

Дополнение множества А до универсального обозначается $\bar{A}$.



4. Свойства операций над множествами

Для любого множества A, B, C и универсального множества U справедливо следующее равенство:

1. $A \cap A = A$ – идемпотентность пересечения
2. $A \cup A = A$ – идемпотентность объединения
3. $A \cap B = B \cap A$ – закон коммутативности пересечения
4. $A \cup B = B \cup A$ – закон коммутативности объединения
5. $(A \cap B) \cap \mathrm{C} = A \cap (B \cap \mathrm{C})$ – закон ассоциативности пересечения
6. $(A \cup B) \cup \mathrm{C} = A \cup (B \cup \mathrm{C})$ – закон ассоциативности объединения
7. $A \cap (B \cup \mathrm{C}) = (A \cap B) \cup (A \cap \mathrm{C})$ – закон дистрибутивности пересечения относительно объединения
8. $A \cup (B \cap \mathrm{C}) = (A \cup B) \cap (A \cup \mathrm{C})$ – закон дистрибутивности объединения относительно пересечения
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ – первый закон Де Моргана
10. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – второй закон Де Моргана
11. $A \cup \emptyset = A$, $A \cup U = U$ – свойства пустого и универсального множества
12. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap U = A$ – свойства пустого и универсального множества

Доказательство равенств 1 и 2, 3 и 4 следует из определений.

Доказательство остальных равенств проводится с помощью кругов Эйлера.

Рассмотрим доказательство 5 равенства: $(A \cap B) \cap \mathrm{C} = A \cap (B \cap \mathrm{C})$.

5. Разбиение множеств

Разбиение множества – набор его непустых подмножеств со следующими свойствами:

- подмножества попарно не пересекаются;
- любой элемент множества попадает в одно из подмножеств.

Например: $A = \{a, b, c, d, e\}$, разбиение $\{a, c\}, \{b, d\}, \{e\}$.

Разбиение также называется **классификацией**, а подмножество из набора **классом**.

Для любого разбиения конечного множества, мощность множества равна сумме мощностей подмножеств из набора.

6. Декартово произведение множеств

Пусть X и Y – два множества.

Декартовым (или прямым) произведением множеств X и Y называется множество $X \times Y$, состоящее из всех упорядоченных пар (x, y), в которых первая компонента $x \in X$, а $y \in Y$

Упорядоченная пара – два произвольных объекта взятых в определённом порядке. Объектами могут быть элементы множеств.

Задача 1. Пусть $X \in \{1,2,3\}$, $Y \in \{x, m\}$. Записать все элементы декартового произведения $X \times Y$.

Решение. Для записи декартового произведения конечных множеств используют прямоугольную таблицу.

X\Y	x	m
1	(1, x)	(1, m)
2	(2, x)	(2, m)
3	(3, x)	(3, m)

Задача 2. Пусть $X \in \{a, b, c\}$. Записать все элементы декартового произведения $X \times X$.

Решение. Для записи декартового произведения конечных множеств используют прямоугольную таблицу.

X\X	a	b	c
a	(a, a)	(a, b)	(a, c)
b	(2, x)	(b, b)	(b, c)
c	(3, x)	(c, b)	(c, c)

7. Свойства декартового произведения множеств

Теорема 1. Для операции декартового произведения множеств не выполняется коммутативный закон, т.е. если множества X и $Y \neq \emptyset$, то $X \times Y \neq Y \times X$

Теорема 2. Для операции декартового произведения множеств не выполняется ассоциативный закон, т.е. если множества X и $Y \neq \emptyset$, то $X \times Y \neq Y \times X$.

Теорема 3. Для числа элементов декартового произведения конечных множеств верна формула $|X \times Y| = |X| \times |Y|$.

Декартового произведение $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ конечного множества X самого на себя имеет мощность $|X \times X| = |X|^2$.

ТЕМА 1.2. ФУНКЦИИ

§ 1. Понятие функции

Определение 1. Пусть даны два произвольных множества X и Y. Соответствие между множествами X и Y, при котором каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$, называется функцией, заданной на множестве X со значениями в множестве Y.

Функция обозначается при помощи некоторой латинской (а иногда греческой) буквы, например, буквы f.

Элемент $x \in X$ называется аргументом или независимой переменной функции f, соответствующий ему элемент $y \in Y$ называется значением функции f в точке x и обозначается $f(x)$.

Множество X называется областью определения функции f и обозначается $D(f)$.

Множество всех чисел $f(x)$, где $x \in D(f)$, называется множеством значений функции и обозначается $E(f)$.

Заметим, что если $y \in E(f)$, то существует, по крайней мере, один такой $x \in D(f)$, что $f(x) = y$.

Функцию f, заданную на множестве X со значениями в множестве Y, обозначают следующим образом:

$$y = f(x),\ f : X \to Y,\ X \xrightarrow{f} Y.$$

Определение 2. Если область определения функции f и множество её значений являются некоторыми множествами действительных чисел, то такую функцию называют действительной функцией одной действительной переменной.

§ 2. График функции

Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения X.

Введём понятие графика функции. На плоскости рассмотрим прямоугольную систему координат и построим точку $M(x, f(x))$, абсцисса которого – значение аргумента $x \in X$, а ордината – соответствующее x значение данной функции $f(x)$ (рис. 37).

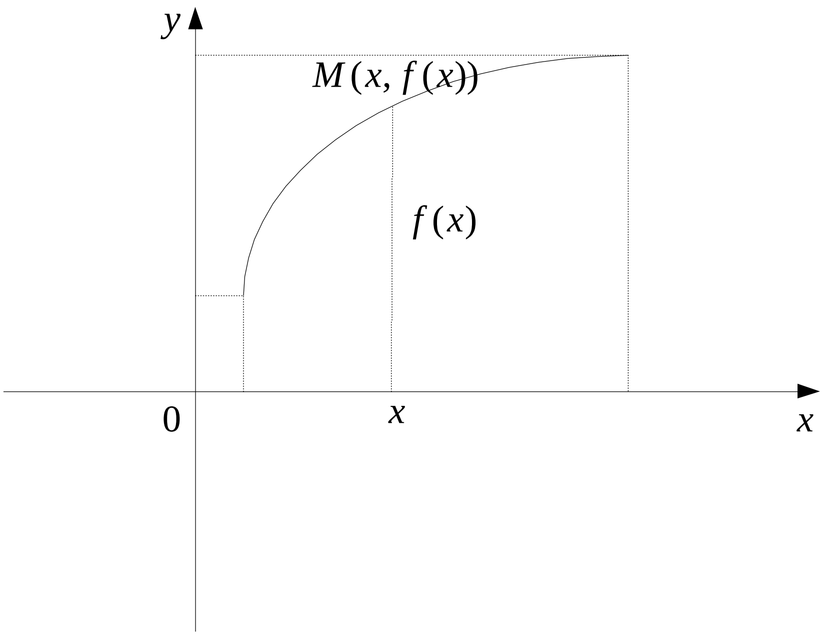


Рис. 37

Если такие построения осуществить для всех значений аргумента x с области определения функции $y = f(x)$, то получим множество точек плоскости, которое и будет графиком функции

Определение. Графиком данной функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Заметим, что для того, чтобы некоторое множество точек плоскости являлось графиком какой-нибудь функции, необходимо, чтобы это множество имело не более одной общей точки с любой прямой, параллельной оси Ox. Например, множество точек плоскости на рисунке 38 не является графиком функции.

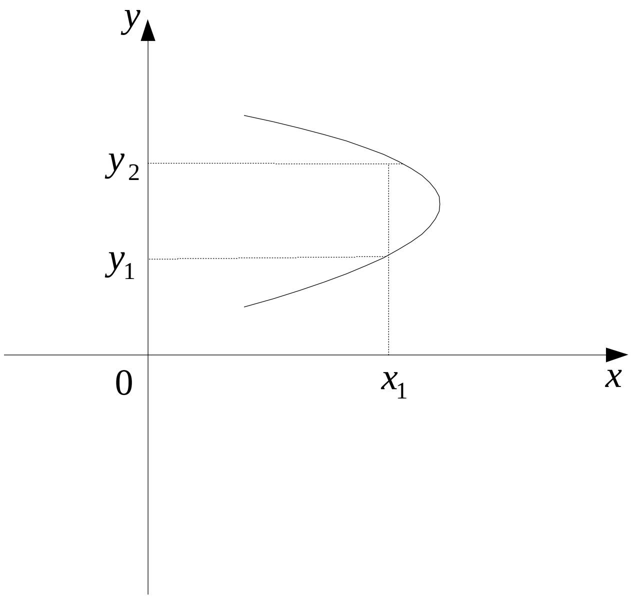


Рис. 38

§ 3. Способы задания функции

Функция считается заданной, если выполнены следующие два условия:

1) заданы два множества X и Y;

2) каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

В зависимости от того, каким способом это можно сделать, существуют следующие способы задания функции.

1. Аналитический способ. Аналитический способ заключается в том, что функция задается формулой, при помощи которой можно вычислить значение функции по значению аргумента.

Замечание 1. Если функция задана формулой, то областью определения функции считается множество всех значений переменной, при которых формула имеет смысл.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \sqrt{x+7} - \sqrt{3-x}$.

Решение. Область определения данной функции состоит из всех значений x, для которых $\sqrt{x+7}, \sqrt{3-x}$ принимают действительные значения. Для этого необходимо, чтобы $\begin{cases} x+7 \ge 0, \\ 3-x \ge 0. \end{cases}$

Решая эту систему, получим $-7 \le x \le 3$. Таким образом, $[-7;3]$ – область определения функции.

Замечание 2. Необходимо отметить, что в некоторых случаях функция задается в области определения не одной формулой, а несколькими.

Например, рассмотрим функция

$$f(x) = \begin{cases} -2x, \text{если } x < 0, \\ x^2, \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 2, \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Эта функция задана аналитическим способом на множестве действительных чисел с помощью трех разных формул.

Пример 2. $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, \text{если } x > 0, \\ 0, \text{если } x = 0, \\ -1, \text{если } x < 0. \end{cases}$

Функция $y = \operatorname{sgn} x$ определена на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, множество ее значений состоит из трех чисел: $-1,0,1$.

Пример 3. Рассмотрим функцию Дирихле, которая задается следующим образом:

$$y = \begin{cases} 1, \text{если } x - \text{рациональн ое число}, \\ 0, \text{если } x - \text{иррационал ьное число}. \end{cases}$$

Область определения этой функции является вся числовая прямая $(-\infty;+\infty)$.множество значений функции состоит из двух чисел: 0 и 1.

Заметим, что построить график функции Дирихле невозможно.

2. Словесный способ. Этот способ заключается в том, что каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$ с помощью словесного описания этого факта.

Пример 4. Каждому действительному числу x поставим в соответствие число y, равное наибольшему целому числу, которое не превосходит x (говорят, что y есть целая часть числа x). Таким образом, на множестве действительных чисел задали функцию, которую обозначают $y = E(x)$ или $y = [x]$.

Например, $E(2{,}3) = 2$, $E(\pi) = 3$, $E(-\pi) = -4$.

Область определения этой функции – множество R всех действительных чисел, а множество значений – множество Z всех целых чисел.

3. Табличный способ. Функциональная зависимость задается с помощью таблицы, содержащей некоторые значения аргумента и соответствующие значения функции.

4. Графический способ. Графический способ заключается в том, что функция задается при помощи своего графика.

§ 4. Классификация функций

1. Функции четные и нечетные.

Определение 1. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется четной, если $\forall x \in X$ выполняются следующие два условия:

1) $-x \in X$;
2) $f(-x) = f(x)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется нечетной, если $\forall x \in X$ выполняются следующие два условия:

1) $-x \in X$;
2) $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричный относительно оси Ox. График нечетной функции симметричный относительно начала координат.

Для функций, заданных на одном и том же симметричном относительно начала координат множестве X, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Сумма или разность двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная).

Теорема 2. Произведение двух чётных или двух нечётных функций есть функция чётная.

Теорема 3. Произведение чётной функции на функцию нечётную есть функция нечётная.

Теорема 4. Любую функцию $f(x)$, заданную на симметричном относительно начала координат множестве, можно записать в виде суммы четной и нечетной функций.

2. Периодические функции.

Определение 3. Функция f, заданная на множестве X, называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для всех $x \in X$ выполняются следующие два условия:

1) $x \pm T \in X$,
2) $f(x+T) = f(x)$.

Число T называется периодом функции.

Можно доказать, что если T – период функции, то числа $kT \quad (k = -1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ также являются периодом функции.

Наименьший положительный период, если он существует, называется основным периодом.

3. Функции ограниченные и неограниченные.

Определение 4. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется ограниченной, если $\exists M > 0, \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

Определение 5. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется неограниченной, если $\forall M > 0, \exists x \in X \Rightarrow |f(x)| > M$.

4. Монотонные функции.

Определение 6. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве E, если $\forall x_1, x_2 \in E$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Определение 7. Функция $y = f(x)$ называется строго монотонной на множестве E, если она на этом множестве возрастает или убывает.

§ 5. Понятие сложной функции. Обратная функция

Пусть даны две функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Обозначим, через X множество таких чисел x из области определения функции $u = \varphi(x)$, для которых соответствующие значения функции $u = \varphi(x)$ попадают в область определения функции $y = f(u)$.

Каждому числу $x \in X$ поставим в соответствие число $f(u)$, где $u = \varphi(x)$. т.е. поставим в соответствие число $f(u(x))$. Тогда на множестве X мы зададим функцию, которая называется сложной функцией или суперпозицией функций $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$. Сложная функция обозначается $y = f(\varphi(x))$ или $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

Пусть $y = f(x)$ – заданная на множестве X функция, Y – множество её значений.

Пусть каждому числу $y \in Y$ соответствует одно такое значение $x \in X$, что $f(x) = y$.

Если каждому числу $y \in Y$ поставить в соответствие это значение $x \in X$, то получим новую функцию $x = \varphi(y)$ с областью определения Y и множеством значений X. Эта функция $x = \varphi(y)$ называется обратной для функции $y = f(x)$.

Обычно и для обратной функции аргумент обозначают через x, а значения функции – y, т.е. пишут $y = \varphi(x)$. Можно доказать, что график функции $y = \varphi(x)$, обратной функции $y = f(x)$, симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

§ 6. Основные числовые функции и их графики

1. Линейная функция $y = ax + b$ $(a, b \in R)$

Область определения этой функции $D(f) = R$, а множество значений

$$E = \begin{cases} R & \forall a \neq 0, \\ \{b\}, a = 0. \end{cases}$$

Линейная функция возрастает при $a > 0$, убывает при $a < 0$.

Графиком функции является прямая линия с угловым коэффициентом $k = a = tg\alpha$ (рис. 39).

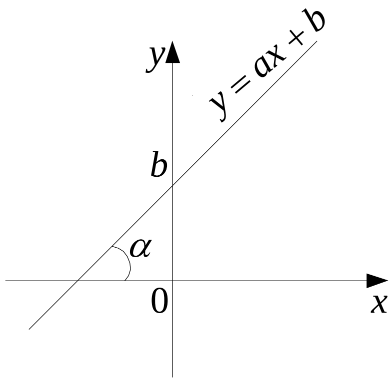


Рис. 39

2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in R, a \neq 0)$.

Рассмотри два случая.

1) Пусть $a > 0$. Тогда $D(f) = R$, $E(f) = \left[\dfrac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$. Функция убывает на промежутке $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$, возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$. Графиком функции является парабола с осью $x = -\dfrac{b}{2a}$, вершиной в точке $M\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ и направленными вверх ветвями (рис. 40).

2) Пусть $a < 0$. Тогда $D(f) = R$, $E(f) = \left(-\infty, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right]$. Функция является

возрастающей на промежутке $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ и убывающей на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$. График функции – парабола с осью $x = -\frac{b}{2a}$, вершиной в точке $N\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ и направленными вниз ветвями (рис. 41).

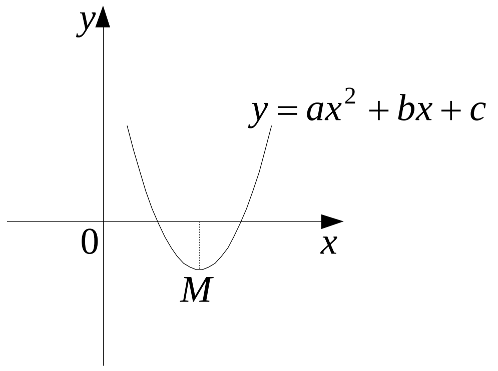


Рис. 40

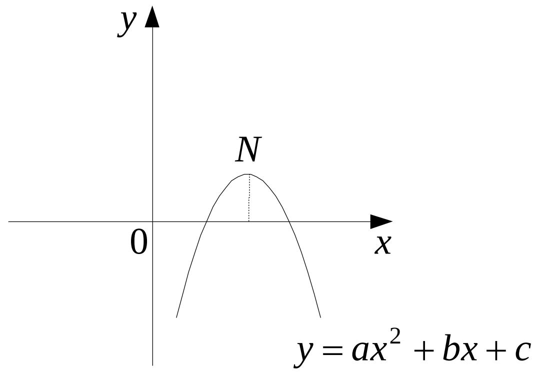


Рис. 41

3. Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Область определения этой функции $D(f) = R$, а множество значений $E(f) = (0, +\infty)$. Функция убывает при $0 < a < 1$ и возрастает при $a > 1$ (рис. 42).

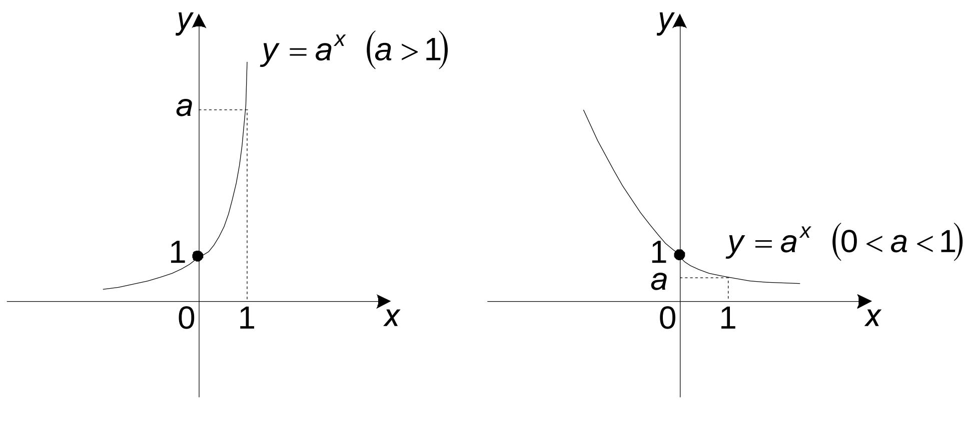


Рис. 42

4. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$.

Эта функция является обратной показательной. Область её определения $D(f) = (0, +\infty)$, множество значений $E(f) = R$. Логарифмическая функция при $0 < a < 1$ убывает, при $a > 1$ – возрастает (рис. 43).

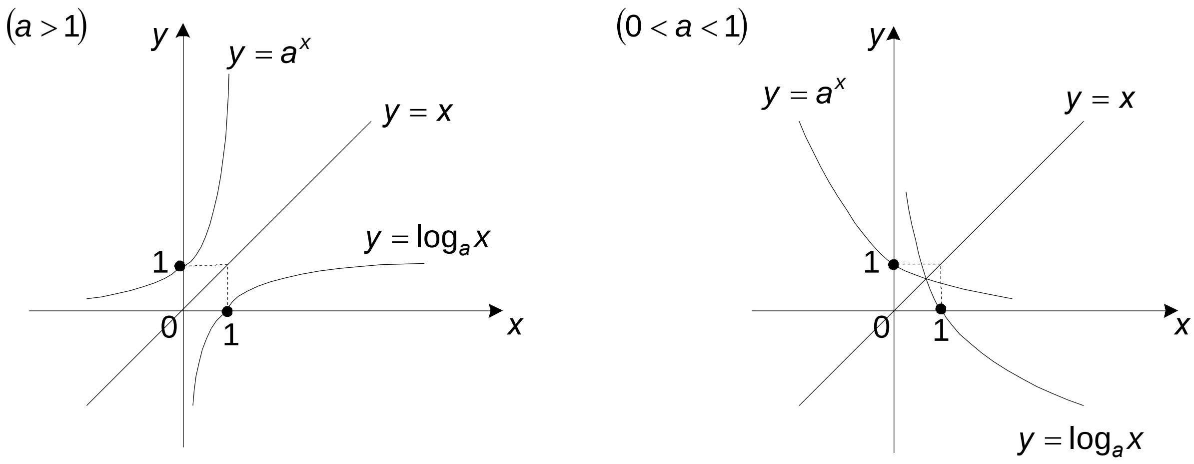


Рис. 43

5. Тригонометрические функции $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=tgx,\ y=ctgx$.

1) Функция $y=\sin x$.

$D(f)=R$; $E(f)=[-1;1]$. Функция $y=\sin x$ является нечетной, периодической с периодом $T=2\pi$. Она возрастает на промежутках $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, убывает на промежутках $\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$ (рис. 44).

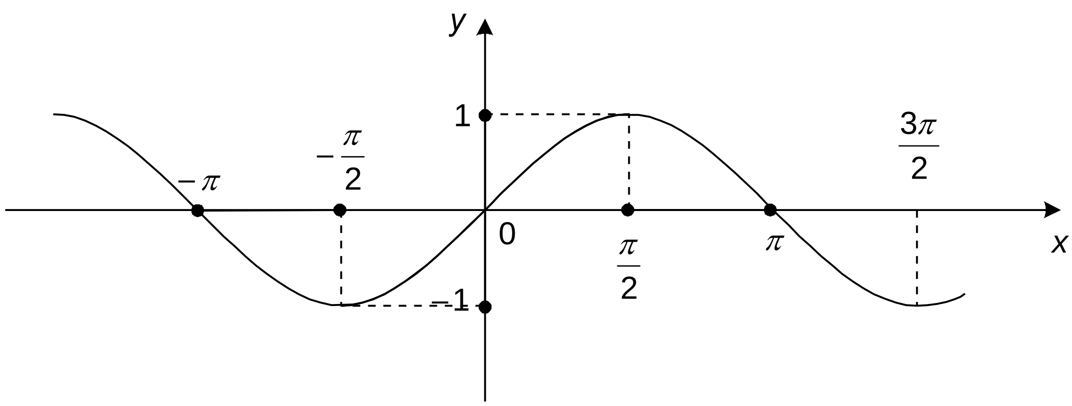


Рис. 44

2) Функция $y=\cos x$.

$D(f)=R$; $E(f)=[-1;1]$. Функция $y=\cos x$ является четной, периодическая с периодом $T=2\pi$. Она возрастает на промежутках $[(2k-1)\pi, 2\pi k]$, убывает на промежутках $[2\pi k,(2k+1)\pi]$, $k\in Z$ (рис. 45).

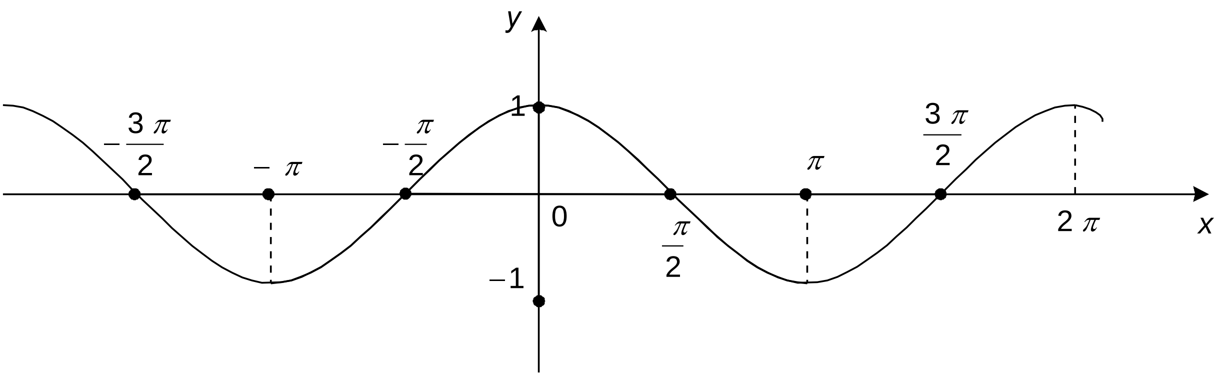


Рис. 45

3) Функция $y = tgx$.

$D(f) = R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}$, $k \in Z$. $E(f) = R$. Функция $y = tgx$ является нечетной, периодической с периодом $T = \pi$. Она возрастает на $D(f)$, т.е. на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, $k \in Z$ (рис. 46).

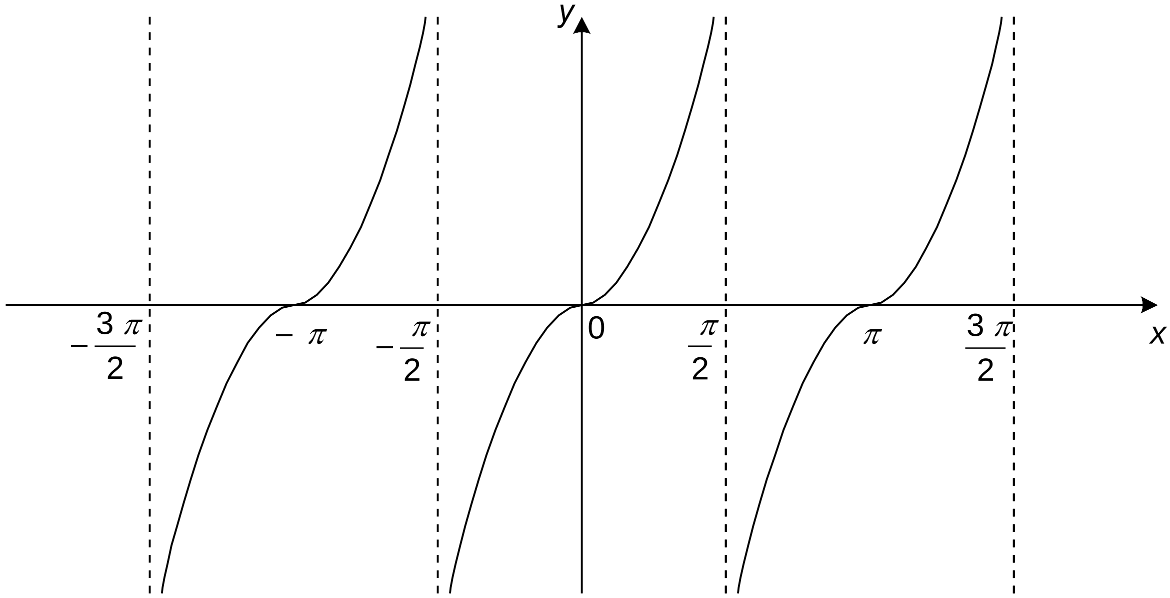


Рис. 46

4) Функция $y = ctgx$.

$D(f) = R \setminus \{\pi k\}$, $k \in Z$. $E(f) = R$. Функция $y = ctgx$ является нечетной, периодической с периодом $T = \pi$. Она убывает на $D(f)$, т.е. на промежутках $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$ (рис. 47).

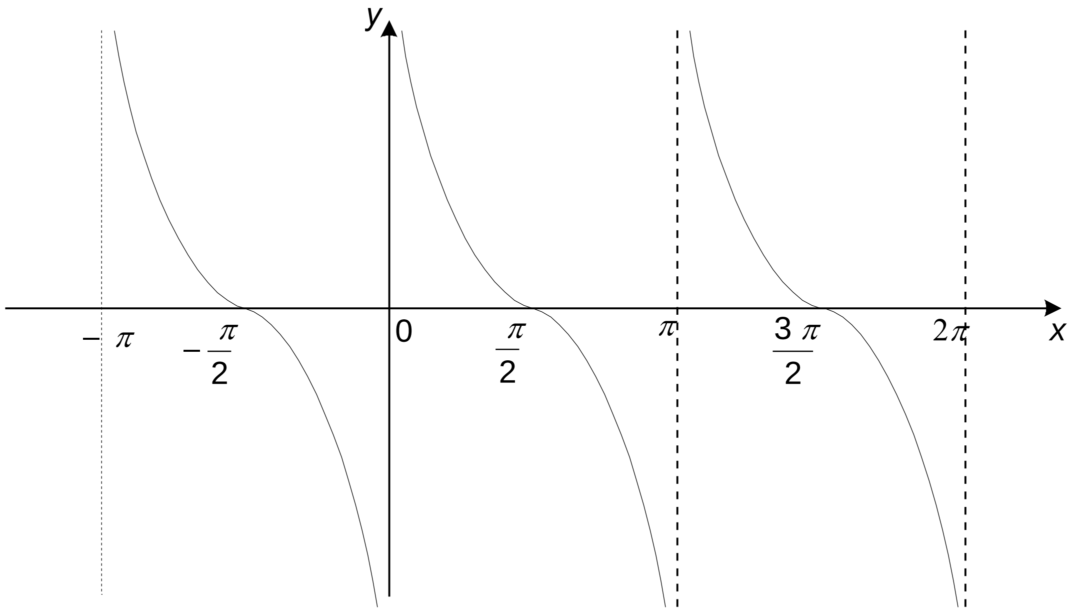


Рис. 47

6. Обратные тригонометрические функции
$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$.

Они определяются как функции, обратные соответствующим тригонометрическим функциям.

1) Функция $y = \arcsin x$. $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$; $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Функция является нечетной, возрастает на $D(f)$ (рис. 48).

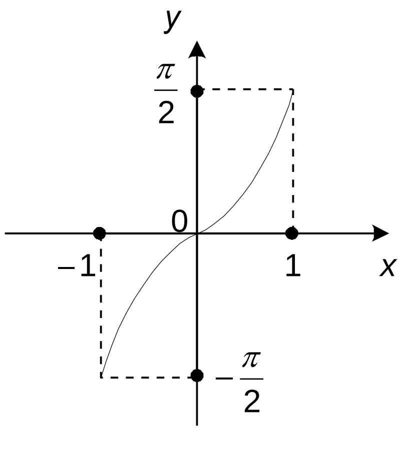


Рис. 48

2) Функция $y = \arccos x$. $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$; $D(f) = [-1;1]$, $E(f) = [0, \pi]$. Функция $y = \arccos x$ убывает на $D(f)$ (рис. 49).

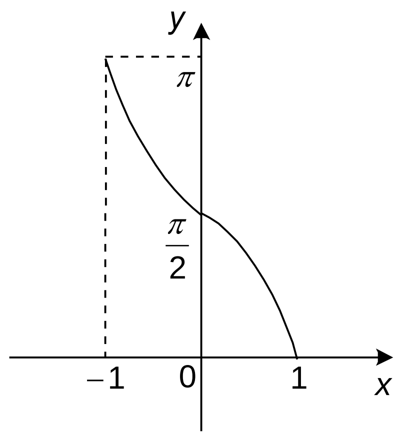


Рис. 49

3) Функция $y = arctgx$. $y = arctgx \Leftrightarrow x = tgy$; $D(f) = R$, $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Она нечетная, возрастает на $D(f)$ (рис. 50).

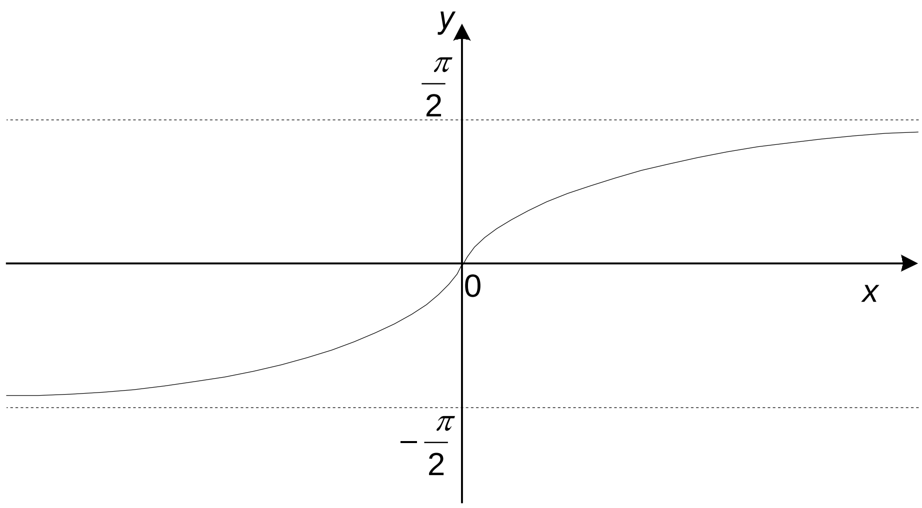


Рис. 50

4) Функция $y = arcctgx$. $y = arcctgx \Leftrightarrow x = ctgy$; $D(f) = R$, $E(f) = (0, \pi)$. Функция $y = arcctgx$ убывает на $D(f)$ (рис. 51).

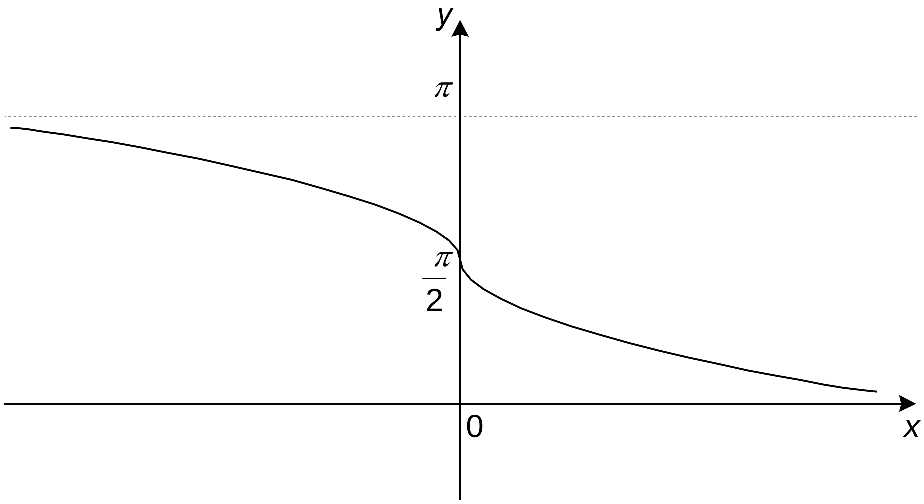


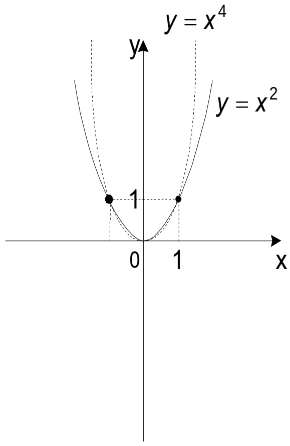
Рис. 51

7. Степенная функция $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \in R)$.

Рассмотрим случаи, которые чаще всего встречаются.

1) Пусть $\alpha = 2n, n \in N$, $y = x^{2n}$. Тогда $D(f) = R$, $E(f) = [0,+\infty)$. Функция является четной и убывает на промежутке $(-\infty,0)$, возрастает на промежутке $(0,+\infty)$ (рис. 52).

2) Пусть $\alpha = 2n+1, n \in N$, $y = x^{2n+1}$. Тогда $D(f) = R$, $E(f) = R$. Функция нечетная и возрастает на R (рис. 53).



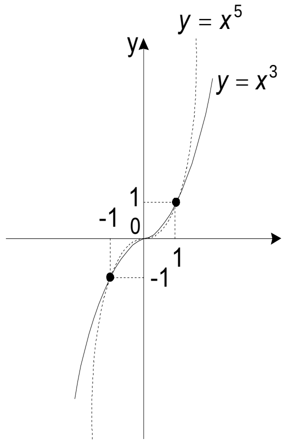


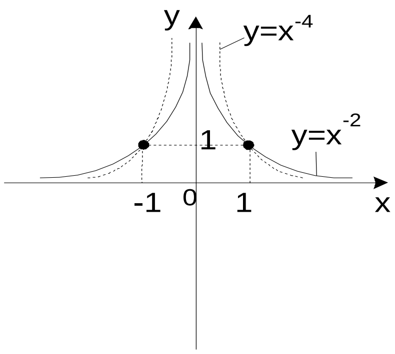
Рис. 52 Рис. 53

3) Пусть $\alpha = -2n, n \in N$, $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$. Тогда $D(f) = R \setminus \{0\}$, $E(f) = (0,+\infty)$. Функция четная, возрастает на промежутке $(-\infty,0)$, убывает на промежутке $(0,+\infty)$ (рис. 54).

4) Пусть $\alpha = -2n+1, n \in N$, $y = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$. Тогда

$$D(f) = R \setminus \{0\},\ E(f) = R \setminus \{0\}.$$

Функция является нечетной, убывает на промежутках $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ (рис. 55).



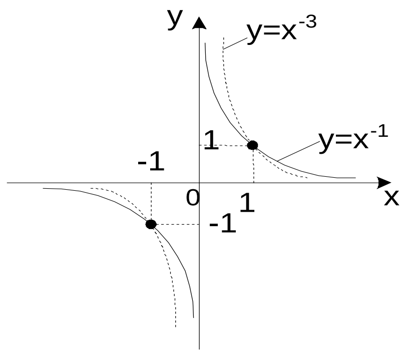


Рис. 54 Рис. 55

5) Пусть $\alpha \notin Z$, $y = x^{\alpha}$. Тогда $D(f) = (0,+\infty)$, $E(f) = (0,+\infty)$. При некоторых α $D(f)$ и $E(f)$ могут быть шире. Часто, например, встречается функция $y = x^{\frac{3}{2}}$ (рис. 56).

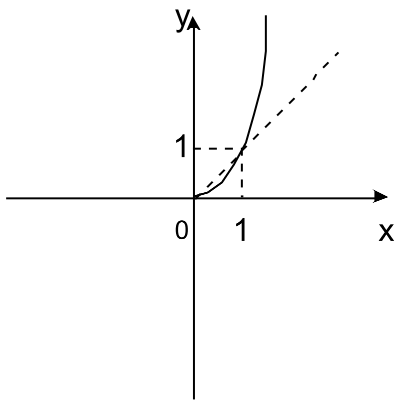


Рис. 56

Определение 1. Постоянная функция $y = c, c = const,$ степенная функция $y = x^{\alpha}$ (α – любое число), показательная функция $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$, логарифмическая функция $y = \log_{a} x$ $(0 < a \neq 1)$, тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$, обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx$ называются основными элементарными функциями.

Определение 2. Все функции, получаемые при помощи конечного числа арифметических действий над основными элементарными функциями, а также суперпозицией этих функций, составляют класс элементарных функций.

ТЕМА 1.3. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Числовая последовательность

Определение 1. Пусть $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел. Если каждому натуральному n поставить в соответствие некоторое число x_n, то говорят, что задана числовая последовательность. Числа x_n называются элементами (членами) последовательности.

Числовую последовательность обозначают: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; $\{x_n\}$; (x_n).

Пример 1. $\left(\frac{1}{n}\right)$. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

Определение 2. Последовательности $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)(y_n \neq 0 \,\forall n)$ называются соответственно суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей (x_n) и (y_n).

Определение 3. Последовательность (x_n) называется ограниченной, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leq M$:

$$\exists M > 0, \forall n \Rightarrow |x_n| \leq M .$$

Определение 4. Окрестностью точки $x = a$ называется любой интервал, содержащий эту точку. ε-окрестностью точки $x = a$ называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Определение 5. Последовательность (x_n) называется неограниченной, если $\forall M > 0 \exists n : |x_n| > M$.

Пример 2. Последовательность $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ ограничена, т.к. $|x_n| \leq 1 \,\forall n$. Последовательность (n^2) является неограниченной.

Определение 6. Последовательность (x_n) называется постоянной, если $x_n = a \in \boldsymbol{R} \;\forall n$.

§ 2. Предел числовой последовательности

Пример 1. Рассмотрим числовую последовательность с общим членом $x_n = \frac{n-1}{n}$. Из рисунка 57, где изображены её первые несколько элементов, видно, что они приближаются к значению $a = 1$.

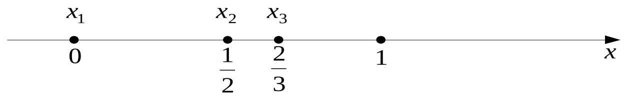


Рис. 57

Итак, видно, что по мере возрастания номера n элемент последовательности неограниченно приближается к единице. В таком случае говорят, что число 1 является пределом последовательности $\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

Определение 1. Число a называется пределом последовательности (x_n), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Используя кванторы, определение предела последовательности можно записать следующим образом:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists N, \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Из геометрических соображений мы уже убедились, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Этому факту можно дать и строгое математическое доказательство.

Геометрический смысл предела последовательности состоит в том, что в любой ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности x_n с номерами $n > N$.

§ 3. Бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность (x_n) называется бесконечно малой (БМП), если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists N, \forall n > N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$.

Пример. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ бесконечно малая.

Свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема 1. Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей есть БМП.

Теорема 2. Бесконечно малая последовательность является ограниченной.

Теорема 3. Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности есть БМП.

Теорема 4. Произведение нескольких БМП есть БМП.

§ 4. Бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность (x_n) называется бесконечно большой (ББП), если $\forall E > 0\, \exists N, \forall n > N \Rightarrow |x_n| > E$.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Если у ББП все элементы, начиная с некоторого элемента, положительные (отрицательные), то пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n^2 = \infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2) = -\infty$.

Свойства бесконечно больших последовательностей

1. ББП – неограниченная последовательность.
2. Произведение двух ББП есть ББП.
3. Сумма ББП и ограниченной последовательности есть ББП.

Приводимая ниже теорема иллюстрирует связь между БМП и ББП.

Теорема. Пусть все члены последовательности (x_n) отличны от нуля. Если (x_n) – БМП, то последовательность $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ есть ББП. Если (x_n) – ББП, то последовательность $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ есть БМП.

§ 5. Сходящиеся последовательности

Определение. Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся, последовательность, не имеющая предела, – расходящейся.

Простейшим примером сходящейся последовательности является БМП. В качестве расходящейся последовательности можно привести последовательность

$$-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots \quad .$$

Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1. Для того, чтобы последовательность (x_n) имела своим пределом число a, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(x_n - a)$ было БМП.

Теорема 2. Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 3. Сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ (при условии, что $b \neq 0$).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{n^2+1}$.

Решение. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности (являются ББП). Следовательно, непосредственно применить теорему 4 нельзя. Говорят, что имеет место неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Необходимо преобразовать общий член последовательности, разделив числитель и знаменатель на n^2 (на n в максимальной степени). Получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{2+0+0}{1+0}=2.$$

При вычислении пределов числовых последовательностей могут встречаться и неопределенности вида: $\dfrac{0}{0}$; $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; 1^∞; 0^0; ∞^0.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$.

Решение. Здесь необходимо раскрыть неопределенность вида $\infty-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0.$$

Пример 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.

Решение. Так как $1+2+3+\ldots+n$ есть сумма членов арифметической прогрессии с разностью $d=1$ и она равна $\dfrac{(1+n)n}{2}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

§ 6. Предельный переход в неравенства

Теорема 1. Если (x_n) – сходящаяся последовательность и, начиная с некоторого номера, $x_n\le b$ ($x_n\ge b$), то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le b$ ($\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le b$).

Теорема 2. Если элементы сходящихся последовательностей (x_n) и (y_n), начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n\le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Теорема 3 (*о пределе промежуточной последовательности*). Пусть даны три последовательности (x_n), (y_n), (z_n), и, начиная с некоторого номера, $x_n \le y_n \le z_n$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

§ 7. Монотонные последовательности

Определение 1. Последовательность (x_n) называется возрастающей (убывающей), если

$$\forall n \Rightarrow x_n \le x_{n+1} \ (\forall n \Rightarrow x_n \ge x_{n+1}).$$

Определение 2. Возрастающая и убывающая последовательности называются монотонными.

Определение 3. Последовательность (x_n) называется строго возрастающей (строго убывающей), если

$$\forall n \Rightarrow x_n < x_{n+1} \ (\forall n \Rightarrow x_n > x_{n+1}).$$

Определение 4. Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются строго монотонными.

Пример 1. $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ – строго возрастающая последовательность; $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ – строго убывающая последовательность.

Теорема 1. Монотонная ограниченная последовательность сходится.

Теорема 2. Последовательность с общим членом $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Предел последовательности $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ обозначается буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e известно как основание натуральных логарифмов. Можно доказать, что число e является иррациональным, $e = 2{,}7182818284590\ldots$.

ТЕМА 1.4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 1. Понятие предела функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0. Возьмем последовательность точек (x_n) из этой окрестности, сходящуюся к точке x_0. Значения функции в точках последовательности, в свою очередь, образуют последовательность $(f(x_n))$.

Определение 1. Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности (x_n), сходящейся к точке x_0 и такой, что $x_n \neq x_0 \ \forall n$, соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))$ сходится к a.

Данное определение называется определением предела функции в точке по Гейне, или на языке последовательностей.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Определение 2. Число a называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, или на бесконечности, если для любой последовательности ББП (x_n) соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))$ сходится к a.

Пример 1. Постоянная функция $f(x) = C$ в каждой точке имеет предел:

$$\lim_{x \to x_0} C = C.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Имеет место и другое определение предела функции в точке.

Определение 3. Число a называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Это определение называется определением предела функции в точке по Коши, или на языке $\varepsilon - \delta$. Можно доказать, определения предела функции по Гейне и по Коши равносильны.

§ 2. Односторонние пределы

Определение 1. Число a называется правым пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности (x_n), сходящейся к точке x_0 и такой, что $x_n > x_0 \ \forall n$, соответствующая последовательность значений функции $(f(x_n))$ сходится к a.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$.

Аналогичным образом определяется левый предел.

Определение 2. Число a называется левым пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности (x_n), сходящейся к точке x_0 и такой, что $x_n < x_0\ \forall n$, соответствующая последовательность значений функции $\left(f(x_n)\right)$ сходится к a.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=a$.

Определение 3. Правый и левый пределы функции в точке называются односторонними.

Теорема. Для того, чтобы функция $y=f(x)$ в точке x_0 имела предел, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны односторонние пределы функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

§ 3. Бесконечно малые функции

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$ (БМФ), если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=0$.

Например, функция $y=x$ является БМФ при $x\to 0$, но не является БМФ при $x\to 1$.

Свойства БМФ

1. Сумма любого конечного числа БМФ есть БМФ.
2. БМФ при $x\to x_0$ является ограниченной в некоторой окрестности точки x_0.
3. Произведение БМФ при $x\to x_0$ и функции, ограниченной в некоторой окрестности точки x_0, есть БМФ при $x\to x_0$.
4. Произведение нескольких БМФ есть БМФ.
5. Произведение БМФ на постоянную есть БМФ.

§ 4. Бесконечно большие функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to x_0$ (ББФ), если для любой последовательности (x_n), сходящейся к точке x_0 и такой, что $x_n\neq x_0\ \forall n$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty\ (\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty, \lim_{n\to\infty} f(x_n)=-\infty).$$

В этом случае применяется обозначение:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty\ (\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty).$$

Связь между БМФ и ББФ характеризует следующая теорема.

Теорема. Если $\alpha(x)$ – БМФ при $x\to x_0$, причем $\alpha(x)\neq 0$ при $x\neq x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – ББФ при $x\to x_0$.

И обратно, если $f(x)$ – ББФ при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – БМФ при $x \to x_0$.

§ 5. Свойства предела функции

Теорема 1. Функция $y = f(x)$ имеет предел a при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда разность $\alpha(x) = f(x) - a$ является БМФ при $x \to x_0$.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то этот предел единственный.

Теорема 3. Функция, имеющая предел при $x \to x_0$, ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 4. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = b$. Тогда:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = a \pm b,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\varphi(x) = ab,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{b} \text{ (при условии, что } b \neq 0\text{)}.$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x+2}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x+2} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 0}(x^2+1)}{\lim\limits_{x \to 0}(x+2)} = \dfrac{(\lim\limits_{x \to 0} x)^2 + \lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} x + \lim\limits_{x \to 0} 2} = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1}(x^2+x+1) = 3$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{5+x^2}-3}{x^2-4}$.

Решение. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{5+x^2}-3}{x^2-4} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(\sqrt{5+x^2}-3)(\sqrt{5+x^2}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{5+x^2}+3)} =$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2-3}{(x^2-4)(\sqrt{5+x^2}+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{5+x^2}+3} = \frac{1}{6}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{99x^2+x+1}{x^2+99} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{99 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{99}{x^2}} = 99$.

§ 6. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы

Теорема 1. Пусть в некоторой окрестности X точки x_0 (кроме, быть может, точки x_0) выполняется неравенство $f(x) \le \varphi(x)$. Если данные функции в точке x_0 имеют пределы, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$.

Теорема 2 (о пределе промежуточной функции). Пусть функции $f(x),\ g(x), \varphi(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, точки x_0, и удовлетворяют неравенству $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = a$.

Теорема 3. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Последнее равенство называется *первым замечательным пределом*.

Следующие соотношения являются следствиями первого замечательного предела: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arctg\, x}{x} = 1$.

Теорема 4. Справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Это равенство называется *вторым замечательным пределом*.

Часто встречаются следствия второго замечательного предела:

$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, а также $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$ $(k > 0)$.

В частности, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 = 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. $$\lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{l} 2x = t, \\ x = \frac{t}{2}, \\ x \to 0, t \to 0. \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e^2.$$

§ 7. Эквивалентные бесконечно малые функции

Определение. Две бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

В этом случае пишут, что $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Таблица некоторых эквивалентностей

Если $\alpha(x)$ – БМФ при $x \to x_0$, то при $x \to x_0$

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$,

$tg\alpha(x) \sim \alpha(x)$,

$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$,

$arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$,

$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$,

$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если любую из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией.

Пример 1. Доказать, что бесконечно малые при $x \to 0$ функции $\dfrac{x}{1-x}$ и $\dfrac{x}{1+x^2}$ эквивалентны.

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{x}{1+x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x^2}{1-x} = 1.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{tg 7x}$.

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{tg 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}.$$

ТЕМА 1.5. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

§ 1. Непрерывные функции одной переменной

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = 3x + 1$.
Вычислим $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(3x + 1) = 4$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ (рис. 58).

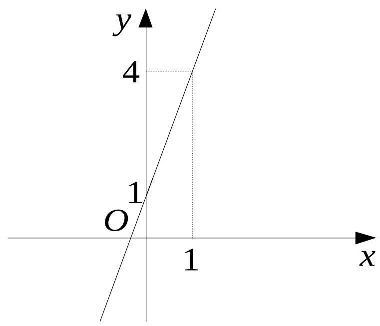


Рис. 58

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, \ x \neq 1, \\ 5, \ x = 1. \end{cases}$.

Имеем $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4,\ f(1) = 5$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ (рис. 59).

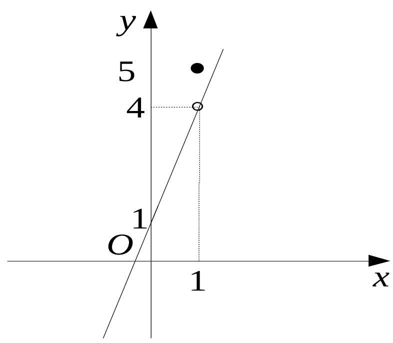


Рис. 59

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой окрестности этой точки. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Следовательно, функция, рассмотренная в примере 1 является непрерывной в точке $x_0 = 1$, а функция из примера 2 не является непрерывной в точке $x_0 = 1$.

Определение 2. Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0, называется непрерывной слева (справа) в точке x_0, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ $(\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0))$.

Теорема. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, будет непрерывной в точке x_0 тогда и только тогда, когда она будет непрерывной в этой точке и слева и справа.

Рассмотрим точку x_0 и ещё одну точку x. Обозначим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Δx называется приращением аргумента, а Δy соответствующим приращением функции в точке x_0.

Воспользовавшись введенными понятиями, определение непрерывности функции в точке можно сформулировать так.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

§ 2. Точки разрыва и их классификация

Определение. Пусть f – функция, определённая в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, точки x_0. Точка x_0 называется точкой разрыва функции f, если функция f не определена в точке x_0, или если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

1. Условимся говорить, что функция f в точке x_0 имеет разрыв первого рода, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы и хотя бы один из них не равен значению данной функции в точке x_0.

Возможны следующие два случая.

а) $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)$. В этом случае говорят, что функция f в точке x_0 имеет устранимый разрыв (рис. 60).

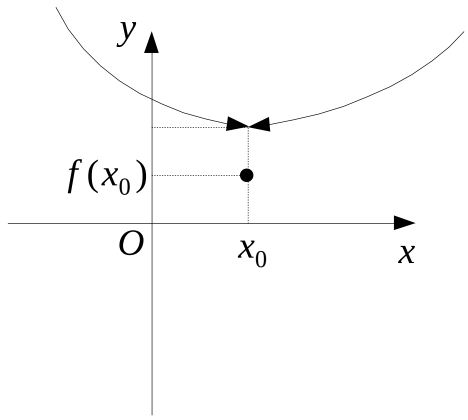


Рис. 60

б) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Тогда говорят, что функция f в точке x_0 имеет разрыв с конечным скачком (рис. 61). При этом число $\left|\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\right|$ называется скачком функции f в точке x_0.

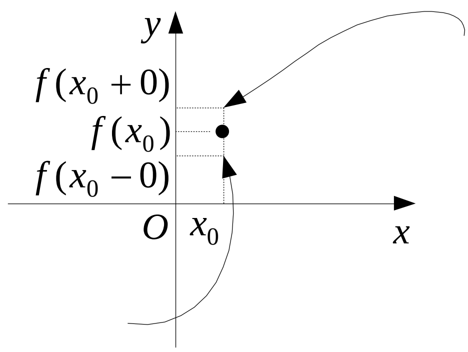


Рис. 61

2. Условимся говорить, что функция f в точке x_0 имеет разрыв второго рода, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов или бесконечен, или совсем не существует.

§ 3. Теоремы о непрерывных в точке функциях

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке x_0, то она положительна (отрицательна) в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то непрерывными в точке x_0 будут и функции $f(x)+\varphi(x)$, $f(x)-\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (частное при условии $\varphi(x_0)\neq 0$).

Теорема 4 (*непрерывность сложной функции*). Если функция $u = \varphi(x)$

непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в соответствующей точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 5. (*непрерывность обратной функции*). Пусть функция $y=f(x)$ определена и возрастает (убывает) на некотором промежутке X. Тогда обратная функция $x=\varphi(y)$ существует и возрастает (убывает) на промежутке Y – множестве значений функции $y=f(x)$. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x_0\in X$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0=f(x_0)$.

§ 4. Непрерывность элементарных функций

1^0. Постоянная функция $f(x)=c$ является непрерывной в каждой точке числовой прямой, т.к. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c=f(x_0)$.

2^0. Функция $f(x)=x$ непрерывна $\forall x$. Действительно, $\forall x_0$ имеем $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0=f(x_0)$.

3^0. Рассмотрим многочлен n степени, т.е. функцию $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_n\neq 0$. Эта функция непрерывна на множестве $(-\infty,+\infty)$. Это утверждение следует из теоремы 3 предыдущего параграфа.

4^0. Из теоремы 3 следует также, что дробно-рациональная функция $f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}$ непрерывна во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль.

5^0. Докажем, что функция $y=\sin x$ непрерывна на всей числовой прямой.

Пусть x – произвольная точка числовой прямой. Дадим x приращение Δx. Получим точку $x+\Delta x$. Функция $y=\sin x$ получит приращение $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$, или $\Delta y=2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})$. Тогда имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=0,$$

т.к. $\left|\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})\right|\le 1$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\dfrac{\Delta x}{2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{2}=0$.

Аналогично доказывается, что функция $y=\cos x$ непрерывна $\forall x$.

6^0. Из непрерывности функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ на основании теоремы 3 предыдущего параграфа следует непрерывность функции $y=tgx$ во всех точках, где $\cos x\neq 0$, т.е. во всех точках, кроме $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, и функции $y=ctgx$

во всех точках, кроме $x = \pi n$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Не доказывая, отметим, что любая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

§ 5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a,b), непрерывна справа в точке $x = a$ и непрерывна слева в точке $x = b$.

Теорема 1 (*первая теорема Вейерштрасса*). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Теорема 2 (*вторая теорема Вейерштрасса*). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она на этом отрезке принимает наименьшее и наибольшее значения.

Теорема 3 (*первая теорема Больцано-Коши*). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между точками a и b существует точка $c \in (a,b)$, что $f(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы (рис. 62):

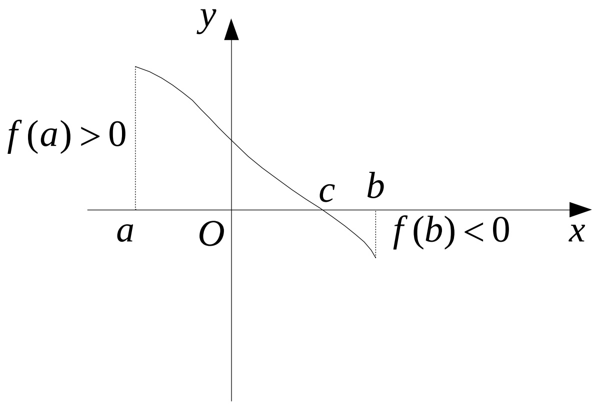


Рис. 62

Теорема 4 (*вторая теорема Больцано-Коши*). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$ $(A \neq B)$. Тогда, если C – любое число, лежащее между A и B, то существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c) = C$.

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Возьмем точку $x \in X$. Дадим x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Если предел (1) конечен, то производная называется конечной. Если же этот предел бесконечен, то и производная называется бесконечной.

Таким образом, конечная производная в данной точке является числом.

Если конечная производная существует в каждой точке некоторого множества X, тогда она является функцией, заданной на этом множестве.

Производную функции $y = f(x)$ в произвольной точке x обозначают также следующим образом: $y', \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}, \dfrac{df(x)}{dx}$.

Операция нахождения производной $f'(x)$ данной функции $y = f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Пример 1. Пользуясь определением производной, найдите производную функции $y = c, \quad c = const$.

Решение. Имеем: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$.

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Таким образом, согласно определению производной, имеем:

$$(c)' = 0.$$

Пример 2. Пользуясь определением производной, найдите производную функции $y = x$.

Решение. Имеем: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$.

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, получим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1.$

Таким образом, согласно определению производной, имеем:

$$(x)'=1.$$

§ 2. Правила дифференцирования

Теорема. Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ в точке x имеют производные, то сумма, разность, произведение и частное этих функций также имеют производную в этой точке (частное при условии, что $v(x)\neq 0$) и справедливы следующие формулы:

$$(u\pm v)'=u'\pm v',\ (u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u,\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Следствие.

1. $(cu)'=cu'$.
2. $(uvw)'=u'vw+v'uw+w'uv$.
3. $(u^n)'=nu^{n-1}u'$.
4. $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$

§ 3. Таблица производных элементарных функций. Производная сложной и обратной функций

Теорема 1 (*производная сложной функции*). Пусть дана сложная функция $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Если функция $u=\varphi(x)$ в точке x имеет производную $u'_x=\varphi'(x)$, а функция $y=f(u)$ в соответствующей точке u имеет производную $y'_u=f'(u)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x, причём $y'_x=y'_u\cdot u'_x$, т.е. производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

Теорема 2 (*производная обратной функции*). Пусть функция $y=f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Если данная функция в точке x имеет производную $y'_x=f'(x)\neq 0$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ в соответствующей точке y также имеет производную $x'_y=\varphi'(y)$, причём $x'_y=\frac{1}{y'_x}$.

Можно доказать следующие формулы дифференцирования, которые сведем в таблицу.

Элементарные функции	**Сложные функции**
$(c)'=0$	
$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}(\alpha\neq 0)$ $(x)'=1$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'\,(\alpha\neq 0)$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(a^x)'=a^x\ln a\,(0<a\neq 1)$	$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'\,(0<a\neq 1)$
$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\,(0<a\neq 1)$	$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}\,(0<a\neq 1)$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(arctg\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arctg\,u)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$
$(arcctg\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctg\,u)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$

Пример 1. Найдите производную функции $y=5x^3-2x^2+3x-4$.

Решение. $y'=(5x^3-2x^2+3x-4)'=(5x^3)'-(2x^2)'+(3x)'-(4)'=$
$=5\cdot 3x^2-2\cdot 2x+3\cdot 1=15x^2-4x+3$.

Пример 2. Дано $y=x^3\cos x$. Найдите y'.

Решение. По правилу дифференцирования произведения получаем
$y'=3x^2\cos x+x^3(-\sin x)=3x^2\cos x-x^3\sin x$.

Пример 3. Найдите производную функции $y = \ln(x^5 - 4x^3 + x)$.

Решение. Положим $y = \ln u$, где $u = x^5 - 4x^3 + x$. Тогда воспользовавшись теоремой о производной сложной функции, будем иметь:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{x^5 - 4x^3 + x} \cdot (5x^4 - 12x^2 + 1) = \frac{5x^4 - 12x^2 + 1}{x^5 - 4x^3 + x}.$$

§ 4. Логарифмическая производная. Производная неявной функции

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Применение предварительного логарифмирования функции позволяет найти, например, производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$.

Логарифмируя, получим: $\ln y = v \ln u$. Дифференцируем обе части последнего равенства по x

$$(\ln y)' = v' \ln u + v(\ln u)', \quad \frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{1}{u}u', \quad y' = y(v' \ln u + v\frac{1}{u}u'),$$

$$y' = u^v(v' \ln u + v\frac{1}{u}u').$$

Пример 1. Найти y', если $y = (\sin x)^x$.

Решение. $\ln y = x \ln \sin x; \; \frac{y'}{y} = \ln \sin x + x ctg x; \; y' = (\sin x)^x(\ln \sin x + x ctg x)$.

Рассмотрим дифференцирование *неявной* функции, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию x, а затем из полученного уравнения найти производную y'.

Пример 2. Найти производную функции y, заданной уравнением $x^2 - xy + \ln y = 2$, и вычислить её значение в точке (2;1).

Решение. Дифференцируя обе части равенства и учитывая, что y есть функция от x, получим $2x - y - xy' + \frac{y'}{y} = 0$, откуда $y' = \frac{2xy - y^2}{xy - 1}$. Значение производной в точке (2;1) равно $y'(2) = 3$.

§ 5. Механический и геометрический смыслы производной

Рассмотрим материальную точку, движущуюся по оси прямолинейно.

Пусть $s = f(t)$ – функция, задающая положение точки в момент времени t (здесь s – абсцисса точки, движущейся по оси, отсчитываемая от какой-нибудь начальной точки O). Будем говорить, что s есть путь, пройденный точкой к моменту времени t. Функция $s = f(t)$ называется законом движения материальной точки.

Рассмотрим какой-нибудь момент времени t. Дадим t приращение Δt. Получим момент времени $t+\Delta t$. При этом путь получит приращение $\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$ – это путь, пройденный материальной точкой за время от момента t до момента $t+\Delta t$.

Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Это отношение называется средней скоростью движения от момента времени t до момента времени $t+\Delta t$. Оно обозначается $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Средняя скорость тем лучше характеризует движение в момент времени t, чем меньше Δt.

Предел $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется мгновенной скоростью или скоростью в момент времени t и обозначается $v(t)$.

Итак, по определению $v(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$.

Если воспользоваться определением производной, то получим

$$v(t) = f'(t), \text{ т.е. } v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, скорость движения в момент времени t есть производная пути по времени.

В этом заключается **механический смысл** производной.

Определение 1. Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей при $\Delta x \to 0$.

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $y = f(x)$ точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной к её графику в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Другими словами, $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет следующий вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Определение 2. Нормалью к графику функции $y = f(x)$ в точке

$M_0(x_0, f(x_0))$ называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной в этой точке.

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет следующий вид:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

§ 6. Дифференциал функции одной переменной

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если она имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если её приращение в этой точке может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \qquad (1)$$

где A – число, независящее от Δx, α – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Можно доказать, что определения 1 и 2 равносильны, и $A = f'(x)$. Тогда равенство (1) может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \qquad (2)$$

где α – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Определение 3. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение производной данной функции в точке x на приращение независимой переменной.

Дифференциал обозначается следующим образом: dy. Итак, по определению

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (3)$$

Для большей симметрии записи Δx называют дифференциалом независимой переменной и обозначают так: $\Delta x = dx$.

Поэтому формула (3) может быть записана в виде

$$dy = f'(x) \cdot dx. \qquad (3')$$

Учитывая равенств (3), равенство (2) можно записать в виде

$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x. \qquad (4)$$

Пример 1. $y = \sin^2 x$.

Решение. $dy = y'dx = 2\sin x \cos x dx = \sin 2x dx$.

Пример 2. $y = e^{x^2}$.

Решение. $dy = y'dx = e^{x^2} 2x dx = 2xe^{x^2} dx$.

При нахождении дифференциалов полезно пользоваться свойствами дифференциала:

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$; 2) $d(uv) = du \cdot v + dv \cdot u$; 3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - dv \cdot u}{v^2}$.

Пример 3. $d(x^2+\ln x)=d(x^2)+d(\ln x)=2xdx+\dfrac{dx}{x}$.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x. Приращение такой функции в точке x может быть представлено в виде $\Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x$, где $dy=f'(x)\cdot\Delta x$.

На графике данной функции рассмотрим точку M с абсциссой x. В этой точке проведем касательную к графику данной функции.

Известно, что $f'(x)=tg\alpha$. Поэтому будем иметь: $dy=tg\alpha\cdot\Delta x$ (рис. 63).

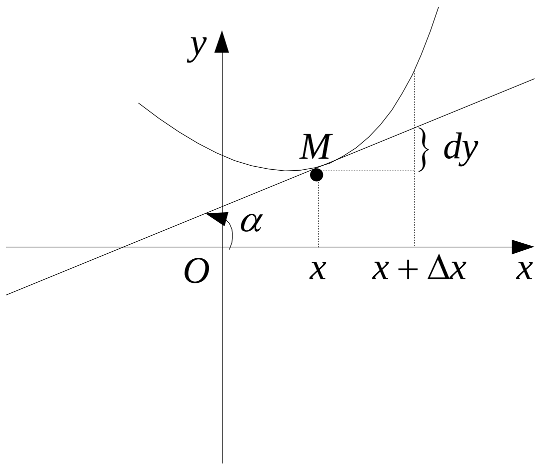


Рис. 63

Таким образом, дифференциал функции есть приращение ординаты точки касательной, когда приращение её абсциссы равно Δx. В этом заключается **геометрический смысл дифференциала**.

Рассмотрим вопрос использования дифференциала в приближённых вычислениях.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируемая в точке x. Приращение такой функции в точке x может быть представлено в виде

$$\Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x, \tag{4}$$

где $dy=f'(x)\cdot\Delta x$.

На практике, при достаточно малых Δx вторым слагаемым, стоящим в правой части равенства (4), пренебрегают и получают приближённое равенство

$$\Delta y\approx dy. \tag{5}$$

Таким образом, при достаточно малых Δx приращение функции Δy заменяют её дифференциалом dy.

Пример 4. Определите, на сколько увеличилось ребро куба, если объём его изменился с 27 м^3 до 27,2 м^3.

Решение. Пусть y – ребро куба, тогда его объём $V=y^3$. Таким образом, задача сводится к отысканию приращения Δy функции $y=\sqrt[3]{V}$ при $V=27$ и $\Delta V=27{,}2-27=0{,}2$. Приращение Δy найдем, исходя из приближённого равенства (5), т.е.

$$\Delta y \approx dy = y' dV = \frac{1}{3\sqrt[3]{V^2}} \Delta V = \frac{1}{3 \cdot 9} \cdot 0{,}2 \approx 0{,}007 \text{ (м).}$$

Равенство (5) можно использовать для нахождения приближенных значений функций. С этой целью это равенство запишем в виде

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx dy,$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy,$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta y. \qquad (6)$$

Пример 5. Найдите приближённое значение $(2{,}01)^3$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Для этой функции формула (6) будет иметь вид:

$$(x+\Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2 \Delta x.$$

Полагая $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$, получаем $(2{,}01)^3 \approx 8 + 12 \cdot 0{,}01 \approx 8{,}12$.

§ 7. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b) и в каждой точке этого интервала имеет производную $y' = f'(x)$. Эту производную будем называть первой производной или производной первого порядка функции $y = f(x)$.

Рассмотрим функцию $f'(x)$.

Определение 1. Производная функции $f'(x)$ в точке $x \in (a,b)$ называется второй производной или производной второго порядка функции $y = f(x)$.

Обозначается вторая производная символами y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $f^{(2)}(x)$.

Таким образом, $f''(x) = (f'(x))'$.

Производная от второй производной называют третьей производной или производной третьего порядка функции $y = f(x)$ и обозначают y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$, $f^{(3)}(x)$.

Определение 2. Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка, если она существует.

Производная n-го порядка обозначается $y^{(n)}, f^{(n)}(x), \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Таким образом, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Производные 2,3,4, … порядков называются производными высших порядков данной функции.

Определение 3. Если функция $y = f(x)$ в точке x имеет конечную производную n-го порядка, то она называется дифференцируемой n раз в этой точке.

Определение 4. Если в каждой точке $x \in (a,b)$ функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз, то она называется n раз дифференцируемой на интервале (a,b).

Пример 1. Найти производную 2-го порядка от функции $y = \ln(1-x)$.

Решение. $y' = \dfrac{-1}{1-x}$, $y'' = \left(\dfrac{-1}{1-x}\right)' = -\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно, то для вычисления n-ой производной произведения этих функций можно пользоваться *формулой Лейбница*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

Определение 5. Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2y = d(dy).$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и т.д. порядков.

Если $y = f(x)$ и x – независимая переменная, то

$$d^2y = y''(dx)^2,$$

$$d^3y = y'''(dx)^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$d^2y = y''(du)^2 + y'd^2u$, $d^3y = y'''(du)^3 + 3y''du\cdot d^2u + y'd^3u$ и т.д.

§ 8. Дифференцирование параметрически заданных функций

Если зависимость функции y и аргумента x задана посредством параметра t

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

или в других обозначениях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

Пример 1. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$

Решение. Находим $\frac{dx}{dt} = -a\sin t$ и $\frac{dy}{dt} = a\cos t$. Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt.$$

Если

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то производные $y''_{xx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, $y'''_{xxx} = \frac{d^3y}{dx^3}$,...последовательно могут быть вычислены по формулам:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\ y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ и т.д.}$$

Пример 2. Найти y'', если $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Решение. $y' = \frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = -\frac{b}{a}ctgt.$

$$y'' = \frac{-\frac{b}{a}(ctgt)'_t}{(a\cos t)'_t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

§ 9. Основные теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема 1 (*теорема **Ферма***). Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a,b) и в некоторой точке $\xi \in (a,b)$ принимает наибольшее или наименьшее значения на (a,b). Если в этой точке существует производная $f'(\xi)$, то она равна нулю: $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ферма: в точке наибольшего или наименьшего значения, достигаемого функцией на интервале (a,b), касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

Теорема 2 (*теорема **Ролля***). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируемая на интервале (a,b) и на концах данного отрезка принимает равные значения, то на интервале (a,b) существует такая точка ξ, что $f'(\xi) = 0$.

Отметим *геометрический смысл теоремы Ролля*: найдется хотя бы одна точка , в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс (рис. 64).

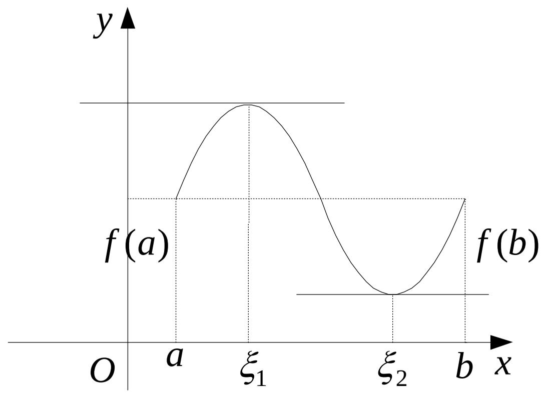


Рис. 64

Теорема 3 (*теорема **Лагранжа***). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируемая на интервале (a,b), то на интервале (a,b) существует такая точка ξ, что

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (1)$$

Формула (1), называемая формулой Лагранжа, справедлива и в случае, когда $a>b$.

Она может быть записана в виде:

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

Так как $a<\xi<b$, то число ξ может быть записано в виде $\xi=a+\theta(b-a)$, где $0<\theta<1$. Поэтому формулу Лагранжа можно записать и так: $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: Если выполняются требования теоремы, то на графике функции найдется такая точка, в которой касательная параллельна хорде AB (рис. 65).

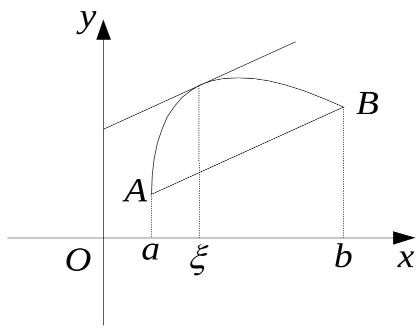


Рис. 65

Теорема 4 (*теорема **Коши***). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b), причём $\varphi'(x)\neq 0$ в каждой точке интервала (a,b). Тогда на интервале (a,b) существует такая точка ξ, что

$$\frac{f(b)-\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши называются теоремами о среднем значении.

§ 10. Приложения дифференциального исчисления

1. Необходимое и достаточное условия постоянства функции

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и дифференцируемая внутри этого промежутка. Для того, чтобы данная функция была постоянной на промежутке X, необходимо и достаточно выполнения условия: $f'(x)=0$ внутри промежутка X.

Следствие. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке X и дифференцируемы внутри этого промежутка. Если $f'(x)=\varphi'(x)$ внутри промежутка X, то данные функции на промежутке X отличаются лишь на постоянную: $f(x)=\varphi(x)+c$ ($c=const$).

2. Достаточные условия строгой монотонности функции

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке X, если для любых $x_1,x_2\in X$, $x_1<x_2$ верно неравенство

$$f(x_1)<f(x_2)\ \ (f(x_1)>f(x_2)).$$

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X и дифференцируемая внутри этого промежутка.

1. Если $f'(x)>0$ внутри промежутка X, то данная функция возрастает на промежутке X.
2. Если $f'(x)<0$ внутри промежутка X, то данная функция убывает на промежутке X.

3. Экстремумы функции

Определение 2. Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если её можно окружить такой окрестностью, что для всех точек x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x)\le f(x_0)\ \ (f(x)\ge f(x_0)).$$

Точка x_0 называется точкой строгого максимума (строгого минимума) функции $f(x)$, если её можно окружить такой окрестностью, что для всех точек $x\ne x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x)<f(x_0)\ \ (f(x)>f(x_0)).$$

Определение 3. Точки максимума и минимума функции $f(x)$ называются точками экстремума данной функции. Значение функции в точке экстремума называется экстремумом функции. Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Точки строгого максимума и строгого минимума функции $f(x)$ называются точками строгого экстремума данной функции. Значение функции в точке строгого экстремума называется строгим экстремумом функции. Значение функции в точке строгого максимума (строгого минимума) называется строгим максимумом (строгим минимумом) функции.

Теорема 3 (*необходимое условие экстремума*). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и в этой точке имеет экстремум, то $f'(x_0)=0$.

Следствие. Точки экстремума функции $f(x)$ следует искать лишь среди тех точек, в которых производная данной функции равна нулю либо не существует.

Определение 4. Те точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю либо не существует, называются критическими точками первого рода функции $f(x)$. Те точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, называются стационарными точками функции $f(x)$.

Таким образом, критические точки первого рода функции $f(x)$ состоят из стационарных точек и тех точек, в которых производная не существует.

Отметим, что критические точки первого рода функции – это лишь подозрительные на экстремум функции.

Теорема 4 (*первое достаточное условие строгого экстремума*). Пусть x_0 – критическая точка первого рода функции $f(x)$. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0, в которой данная функция непрерывна).

1. Если при переходе слева направо через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», то в точке x_0 данная функция имеет строгий максимум.

2. Если при переходе слева направо через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то в точке x_0 данная функция имеет строгий минимум.

3. Если при переходе слева направо через точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то в точке x_0 данная функция не имеет экстремума.

Пример 1. Построить график функции $f(x)=2x^3-3x^2$.

Решение. $D(f)=(-\infty,+\infty)$. Сначала найдем критические точки первого рода: $f'(x)=(2x^3-3x^2)'=6x^2-6x=0$, $6x(x-1)=0$, $x_1=0, x_2=1$– критические точки первого рода данной функции. Исследуем эти точки при помощи теоремы 4.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	возрастает $\nearrow$	*max* $y_{\max}=0$	убывает $\searrow$	*min* $y_{\min}=-1$	возрастает $\nearrow$

График функции изображен на рисунке 66.

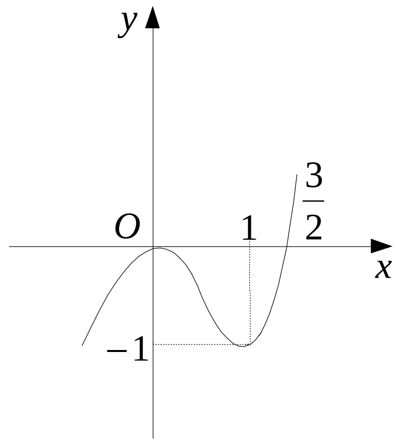


Рис. 66

Теорема 5 (*второе достаточное условие строгого экстремума*). Пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$, и функция в точке x_0 дважды дифференцируема.

1. Если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий максимум.
2. Если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий минимум.

Пример 2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2$. $x_1 = 0, x_2 = 1$ – стационарные точки. $f''(x) = 12x - 6$.

$f''(0) = -6 < 0$, поэтому в точке $x = 0$ данная функция имеет строгий максимум.

$f''(1) = 6 > 0$, поэтому в точке $x = 1$ данная функция имеет строгий минимум.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

При решении прикладных задач, в частности оптимизационных, важное значение имеют задачи на нахождение *наибольшего и наименьшего значений* функции на промежутке X.

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке X. Если этот промежуток является интервалом или полуинтервалом, то данная функция может и не иметь на нём наибольшего (наименьшего) значения. Иная картина наблюдается, если промежуток является отрезком.

Согласно второй теореме Вейерштрасса, если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на нём наибольшее и наименьшее значения. Наибольшее или наименьшее значение функция может достигать как в точках экстремума, так и на концах отрезка. Отсюда следует следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$.

1. Находим критические точки первого рода функции $y = f(x)$.
2. Находим значения функции в этих точках и на концах данного отрезка.
3. Среди этих значений функции выбираем наибольшее $f_{\text{наиб}}$ и

наименьшее $f_{\text{наим}}$.

Пример 3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-3x^2$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2},2\right]$.

Решение. Находим критические точки функции: $f'(x)=6x^2-6x$, $6x^2-6x=0$, $x_1=0, x_2=1$– критические точки первого рода данной функции.

Затем находим значения данной функции в этих точках и на концах отрезка: $f(0)=0$, $f(1)=-1$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$, $f(2)=4$.

Среди этих значений выбираем наибольшее и наименьшее. Получаем: $f_{\text{наиб}}=f(2)=4$, $f_{\text{наим}}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(1)=-1$.

5. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба кривой

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Геометрически это означает, что в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ существует невертикальная касательная к кривой $y=f(x)$. т.е. к графику данной функции.

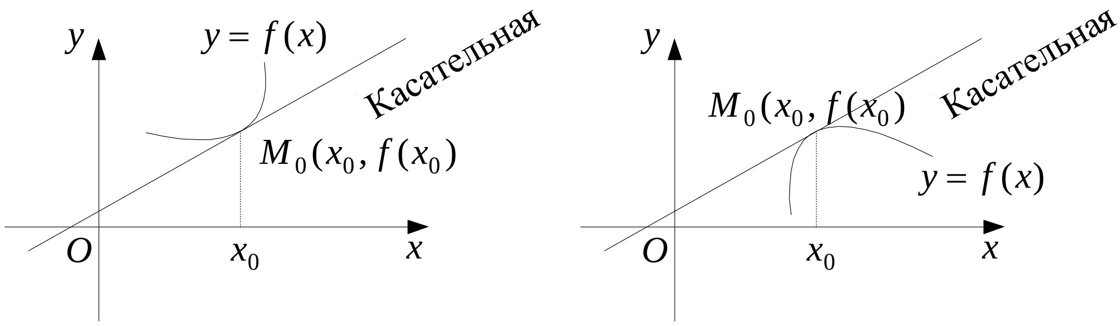


Рис. 67

Определение 5. Если точку x_0 можно окружить такой окрестность, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности, кривая $y=f(x)$ лежит под (над) касательной, проведенной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ (рис. 67), то говорят, что данная кривая в точке M_0 выпукла (вогнута).

Определение 6. Если точку x_0 можно окружить такой окрестность, что для всех $x<x_0$ из этой окрестности, кривая $y=f(x)$ лежит по одну сторону от касательной, проведенной в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, а для всех $x>x_0$ из этой окрестности данная кривая лежит по другую сторону от рассматриваемой касательной (рис. 68), то говорят, что данная кривая в точке M_0 имеет перегиб.

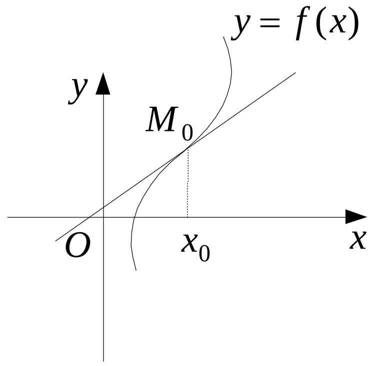


Рис. 68

Определение 7. Если кривая $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ выпукла (вогнута), то x_0 условимся называть точкой выпуклости (вогнутости) функции $f(x)$. Если каждая точка интервала (a,b) является точкой выпуклости (вогнутости) функции $f(x)$, то данная функция называется выпуклой (вогнутой) на интервале (a,b). Если кривая $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет перегиб, то x_0 условимся называть точкой перегиба функции $f(x)$.

Теорема 6 (достаточное условие выпуклости, вогнутости). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0.

1. Если $f''(x_0) > 0$, то кривая $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ вогнута.
2. Если $f''(x_0) < 0$, то кривая $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ выпукла.

Следствие. Точки перегиба функции $f(x)$ следует искать лишь среди таких точек, для которых вторая производная данной функции равна нулю либо не существует.

Такие точки называются критическими точками второго рода функции.

Теорема 7 (достаточный признак перегиба). Пусть x_0 – критическая точка второго рода функции $f(x)$. Если $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то кривая $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет перегиб.

Пример 4. Найдите интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Решение. $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $f''(x) = 12x - 6$, $12x - 6 = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ – критическая точка второго рода функции.

x	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
y''	–	0	+
y		перегиб $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	

РАЗДЕЛ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Основной задачей дифференциального исчисления является следующая задача: дана функция; найти ее производную. Многие задачи науки и техники приводят к обратной задаче: дана функция $f(x)$; найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна данной функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для данной функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка

$$F'(x) = f(x).$$

Пример 1. $f(x) = x^5$. Первообразной для этой функции является функция $F(x) = \frac{1}{6}x^6$, т.к. $\left(\frac{1}{6}x^6\right)' = x^5$. Заметим, что функция $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + 1000$ также является первообразной для функции $f(x) = x^5$.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет также целое семейство первообразных $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, причем это семейство исчерпывает все первообразные данной функции.

Определение 2. Семейство всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором промежутке называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (на этом промежутке) и обозначается символом $\int f(x)dx$.

$f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, знак $\int$ – знаком неопределенного интеграла.

Таким образом, согласно определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, C – произвольная постоянная.

Пример 2. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$; $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Таким образом, нахождение неопределенного интеграла от какой-нибудь функции сводится к нахождению одной первообразной данной функции.

Задача нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется интегрированием данной функции.

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит и неопределенный интеграл.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на некотором промежутке, то на этом промежутке для нее существует первообразная, а. следовательно, и неопределенный интеграл.

§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла

1^0.

$$\int f'(x)dx = f(x) + C. \qquad (1)$$

Справедливость этого свойства очевидна, если учесть что функция $f(x)$ является первообразной для $f'(x)$.

Равенство (1) можно записать в следующем виде:

$$\int d(f(x)) = f(x) + C.$$

2^0.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (2)$$

Если воспользоваться определением дифференциала, то из равенства (2) следует следующее равенство:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3^0. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

4^0. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

Пример 1. Проверить правильность вычисления интеграла

$$\int \left(x^6 - x^4 + 5x + 1\right)dx = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^2 + x + C.$$

Решение. Найдем производную полученного выражения, т. е.

$$\left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{5}{2}x^2 + x + C\right)' = x^6 - x^4 + 5x + 1,$$

Она представляет подынтегральную функцию. Следовательно, данный интеграл вычислен правильно.

§ 3. Таблица основных интегралов

Пусть функция $u(x)$ дифференцируема на некотором промежутке.

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$.
3. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$.
4. $\int e^{u} du = e^{u} + C$.
5. $\int \sin u du = -\cos u + C$.
6. $\int \cos u du = \sin u + C$.
7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$.
8. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$.
9. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \mathrm{arctg} u + C$.
10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$.
11. $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{u}{a} + C$.
12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C$.
13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+A}\right| + C$.
14. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$.
15. $\int \sqrt{u^2+A} du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2+A} + \dfrac{A}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C$.
16. $\int \sqrt{a^2-u^2} du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C$.
17. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\dfrac{u}{2}\right| + C$.
18. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

Докажем, например, формулу 1.

Так как $\left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = u^{\alpha}\cdot u'$, то $\int u^{\alpha}\cdot u'dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, т.е. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

Метод, связанный с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путем преобразований и применения свойств неопределенного интеграла, называется методом непосредственного интегрирования. Этот метод интегрирования, несмотря на кажущуюся простоту, требует определенных навыков и практики.

Рассмотрим примеры использования метода непосредственного интегрирования.

Пример 1. Найти $\int\left(x^5-4x^4+x^2+x-3\right)dx$.

Решение. Этот интеграл алгебраической суммы функций. Вынося постоянные множители за знак интеграла и интегрируя, получим

$$\int\left(x^5-4x^4+x^2+x-3\right)dx = \int x^5dx - 4\int x^4dx + \int x^2dx + \int xdx - 3\int dx =$$

$$= \frac{x^6}{6} - 4\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{1}{6}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\cos 3xdx.$$

Решение.

$$\int\cos 3xdx = \frac{1}{3}\int\cos 3x\cdot 3dx = \frac{1}{3}\int\cos 3xd(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Пример 3. Найти $\int e^{5x}dx.$

Решение.

$$\int e^{5x}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}5dx = \frac{1}{5}\int e^{5x}d(5x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int\sin^5 x\cos xdx.$

Решение. Так как $\cos xdx = d(\sin x)$, то

$$\int\sin^5 x\cos xdx = \int\sin^5 xd(\sin x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

§ 4. Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ непрерывны на некотором промежутке и имеют на этом промежутке непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$.

Имеем $(u\cdot v)' = u'v + uv'$, т.е. функция uv является первообразной для функции $u'v+uv'$, поэтому

$$\int(u'v+uv')dx = uv + C,\ \int vu'dx + \int uv'dx = uv + C,\ \int vdu + \int udv = uv + C,$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

(произвольную постоянную можно не писать, так как она содержится во втором интеграле).

Последняя формула называется ***формулой интегрирования по частям***. Она сводит вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$. Часто случается, что второй интеграл вычислить легко.

Пример.

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \\ du = \frac{1}{x}dx, \\ dv = dx, \\ v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C .$$

§ 5. Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной (методом подстановки)

В основе интегрирования способом подстановки (или замены переменной) лежит следующая теорема.

Теорема. Пусть

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{1}$$

т.е. функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$.

Положим (сделаем подстановку) $x = \varphi(t)$.

Тогда

$$\int f(\varphi(t) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C, \tag{2}$$

т.е. функция $F(\varphi(t))$ будет первообразной для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi(t)$.

Предполагается, что функции $f(x)$, $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ непрерывные.

Замечание 1. Часто случается, что интеграл (1) вычислить затруднительно, т.е. затруднительно найти функцию $F(x)$, но если сделать надлежащую подстановку $x = \varphi(t)$, то интеграл (2) уже легко вычислить, т.е. легко найти функцию $F(\varphi(t))$. Тогда, воспользовавшись подстановкой $x = \varphi(t)$, мы сможем возвратиться от t к x и найти искомую функцию $F(x)$.

Пример 1.

$$\int \cos 5x dx = \left| \begin{array}{l} 5x = t,\ x = \frac{t}{5}, \\ dx = \frac{1}{5}dt \end{array} \right| = \int \cos t \cdot \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\int \cos t dt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C .$$

Пример 2. $\int e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C .$

§ 6. Интегрирование простых дробей

Простыми дробями называются функции следующего вида:

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^n};\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где $A, a, M, N -$.действительные числа; $n>1-$натуральное число; $p, q-$ действительные числа, причем такие, что $\frac{p^2}{4}-q<0$, т.е. такие, что трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Займемся вопросом интегрирования простых дробей.

I. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$.

II. $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A(x-a)^{1-n}}{1-n}+C$.

Пример 1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x-3}$.

Решение. $\int\frac{dx}{x-3}=\int\frac{d(x-3)}{x-3}=\ln|x-3|+C.$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{(4-3x)^3}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{(4-3x)^3}=-\frac{1}{3}\int(4-3x)^{-3}d(4-3x)=-\frac{1}{3}\frac{(4-3x)^{-2}}{-2}+C=\frac{1}{6(4-3x)^2}+C.$$

III.

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t, x=t-\frac{p}{2}, \\ dx=dt, a^2=-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)>0 \end{array}\right|=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{t}{t^2+a^2}dt+$$

$$+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right|+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C.$$

Используя подстановку, можно возвратиться от t к x.

IV. Поступая точно так же, как и предыдущем случае, получаем:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \ldots = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^n}dt = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} +$$

$$+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{M}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2)+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{M}{2(1-n)}(t^2+a^2)^{1-n}+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Таким образом, все свелось к вычислению интеграла $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, вычисление которого производится с помощью рекуррентной формулы

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}. \qquad (1)$$

Эта формула сводит вычисление интеграла I_n к вычислению интеграла I_{n-1}, а вычисление интеграла к вычислению интеграла I_{n-2} и т.д. В конечном итоге придем к табличному интегралу $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2}$.

§ 7. Интегрирование рациональных функций

Рациональными функциями называются функции вида $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x),\ Q(x)$ – многочлены.

Частным случаем рациональной функции является многочлен (целая рациональная функция). Рациональные функции, не являющиеся целыми, называются дробно-рациональными или рациональными дробями.

Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ ниже степени $Q(x)$; в противном случае дробь называется неправильной.

Пример 1. $\frac{x-1}{x^3+2x+3}$ – правильная рациональная дробь. $\frac{x^3+2x^2-x+1}{x-1}$ – неправильная рациональная дробь.

Займемся вопросом интегрирования неправильных рациональных дробей.

Каждая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (это можно сделать делением числителя на знаменатель).

Пример 2. $\frac{x^3+2x^2-x+1}{x-1} = x^2+3x+2+\frac{3}{x-1}$.

Интегрировать многочлены мы умеем, поэтому все сводится к интегрированию правильной рациональной дроби.

Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что коэффициент при наивысшей степени x в многочлене $Q(x)$ равен единице.

В курсе алгебры доказывается, что многочлен $Q(x)$ может быть представлен в виде произведения линейных или квадратных множителей с действительными коэффициентами, причем дискриминант каждого квадратного множителя меньше нуля. Объединяя одинаковые множители, получим следующее представление многочлена $Q(x)$:

$$Q(x) = (x-a)^n \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q)^m \cdot \ldots . \qquad (1)$$

В курсе алгебры доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь, знаменатель которой представлен в виде (1). Эта дробь может быть представлена в виде суммы простых дробей. Причем в этом представлении каждому множителю $(x-a)^n$ знаменателя соответствует следующая сумма n простых дробей:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

а каждому множителю $(x^2 + px + q)^m$ знаменателя соответствует такая сумма m простых дробей:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m}.$$

Таким образом, каждая правильная рациональная дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде следующей суммы простых дробей:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \\ &+ \frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m} + \ldots .\end{aligned} \qquad (2)$$

Коэффициенты представления (2) находятся методом неопределенных коэффициентов.

Сущность этого метода поясним на следующем примере.

Пример 3. Найти интеграл $I = \int \dfrac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Отсюда

$$x \equiv A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1). \qquad (3)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим.

$$0 = A + B,\ 1 = 2A + C,\ 0 = A - B - C.$$

Отсюда

$$A=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4},\ C=\frac{1}{2}.$$

Коэффициенты A, B, C можно найти и вторым способом, который иногда называют методом частных значений.

Полагая $x=1$ в тождестве (3), будем иметь: $1=A\cdot 4$, т. е. $A=\frac{1}{4}$. Полагая $x=-1$, получим: $C=\frac{1}{2}$. Далее, полагая $x=0$, будем иметь: $0=A-B-C$, т. е. $B=A-C=-\frac{1}{4}$.

Следовательно,

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Решение. Здесь под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь.

Разложение данной дроби имеет вид

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4},$$

отсюда

$$1=(Ax+B)(x^2+4)+(Dx+E)(x^2+1).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$A=0,\ B=\frac{1}{3},\ D=0,\ E=-\frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

§ 8. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

I. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R – рациональная функция. Интегралы указанного вида могут быть сведены к интегралам от рациональной функции аргумента t подстановкой $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Эта подстановка называется универсальной.

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, откуда $\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 2. Найти $\int\dfrac{dx}{5-3\cos x}$.

Решение. Пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогда $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t$ и $x=2\operatorname{arctg}t$, откуда $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$;

$\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{5-3\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{4t^2+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2t+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

Иногда универсальная тригонометрическая подстановка приводит к сложным вычислениям, поэтому используются другие подстановки, которые в частных случаях быстрее приводят к цели.

1. Если выполняется равенство $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ или $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то выгоднее применять подстановку $\cos x=t$ в первом случае и $\sin x=t$ – во втором.

2. Если выполняется равенство $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то выгоднее применять подстановку $\operatorname{tg}x=t$.

II. Интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$, где m и n – целые числа. Рассмотрим следующие случаи.

1. Один из показателей m или n – нечетное положительное число. В этом случае применяется подстановка $\cos x=t$ (если m – нечетное) или $\sin x=t$ (если n – нечетное).

2. Оба показателя m и n – четные неотрицательные числа. Тогда следует преобразовать подынтегральную функцию с помощью тригонометрических формул.

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\ \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

3. Показатели m и n – числа одинаковой четности, причем хотя бы один из них отрицателен. Здесь следует применять подстановку $\operatorname{tg}x=t$ (или $\operatorname{ctg}x=t$)

Пример 3. Найти интеграл $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

Решение. Используя формулы понижения степени, получим

$$\int \sin^2 x\cos^4 x dx = \int (\sin x\cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x dx + \int \sin^2 2x \cos 2x dx\right) = \frac{1}{8}\left(\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)\right) =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение. Следует применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$ и использовать формулу $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Тогда,

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

III. Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$. Для нахождения интегралов указанного вида применяются тригонометрические формулы

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right),$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right).$$

§ 9. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

I. Рассмотрим интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right) dx$, где a, b, α, β – действительные числа, $n > 1$ – натуральное число.

Символом $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)$ обозначена функция, которая получена в результате выполнения арифметических операций над действительными функциями x и $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$.

Интегралы рассматриваемого вида вычисляются при помощи так называемого метода рационализации интеграла. Этот метод заключается в том, что с помощью подстановки $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{\alpha x+\beta}}=t$ интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Рассмотрим два частных случая, довольно часто встречающихся на практике.

1. $\alpha=0, \beta=1$. В этом случае рассматриваемый интеграл имеет вид

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx.$$

Он рационализуется при помощи подстановки $\sqrt[n]{ax+b}=t$.

2. $a=1, b=0, \alpha=0, \beta=1$. Рассматриваемый интеграл имеет вид $\int R(x, \sqrt[n]{x})dx$. Он рационализуется при помощи подстановки $\sqrt[n]{x}=t$.

Пример 1.

$$\int x\sqrt[3]{x+2}dx=\left|\begin{aligned}&\sqrt[3]{x+2}=t, t^3-2=x,\\&dx=3t^2dt\end{aligned}\right|=\int(t^3-2)t3t^2dt=$$

$$=3\int(t^6-2t^3)dt=\frac{3t^7}{7}-\frac{3t^4}{2}+C=\frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^4}+C.$$

II. Рассмотрим интеграл вида

$$I=\int x^m(a+bx^n)^p dx, \tag{1}$$

где a,b – действительные числа; m,n,p – рациональные числа.

Подынтегральное выражение называется биномиальным дифференциалом.

Интеграл вида (1) рационализуется, а значит, выражается через элементарные функции, в следующих трех случаях:

1) p – целое; 2) $q=\dfrac{m+1}{n}$ – целое; 3) $p+q=p+\dfrac{m+1}{n}$ – целое.

В случае 1) рационализация осуществляется с помощью подстановки $\sqrt[N]{x}=z$ (N – общий знаменатель чисел m,n).

В случае 2) рационализация осуществляется с помощью подстановки $\sqrt[N]{a+bx^n}=z$ (N – знаменатель дроби p).

В случае 3) рационализация осуществляется с помощью подстановки $\sqrt[N]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}=z$ (N – знаменатель дроби p).

Во всех остальных случаях интеграл вида (1) не выражается через элементарные функции. Этот факт доказан в 19 веке русским математиком П.Л. Чебышевым.

III. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \tag{2}$$

где $a\neq 0$.

Интегралы такого вида всегда можно рационализовать при помощи одной из подстановок Эйлера.

Первая подстановка Эйлера применяется в случае, когда $a > 0$:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x .$$

Пример 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \left|\begin{array}{l} \sqrt{x^2+A} = t - x, \\ x = \dfrac{t^2-A}{2t}, \sqrt{x^2+A} = t - \dfrac{t^2-A}{2t} = \dfrac{t^2+A}{2t}, \\ dx = \dfrac{t^2+A}{2t^2}dt \end{array}\right| = \int\frac{dt}{t} =$

$= \ln|t| + \mathrm{C} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+A}\right| + C$.

Вторая подстановка Эйлера применяется в случае, когда квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет различные действительные корни α и β:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha) .$$

Вычисление интегралов вида (2) при помощи подстановок Эйлера приводит к громоздким вычислениям. Поэтому их следует использовать лишь в том случае, когда рассматриваемый интеграл другими способами вычислить невозможно.

Рассмотрим несколько видов интегралов, которые удобно вычислять не при помощи подстановок Эйлера, а другими методами.

1. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Вычисление таких интегралов целесообразно проводить следующим образом: в квадратном трехчлене выделяем полный квадрат двучлена, а затем делаем подстановку.

Пример 3.

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx = \int\frac{x+3}{\sqrt{6-(x-1)^2}}dx = \left|\begin{array}{l} x-1=t, \\ x=t+1, \\ dx=dt \end{array}\right| = \int\frac{t+4}{\sqrt{6-t^2dt}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int(6-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(6-t^2) + 4\int\frac{dt}{\sqrt{6-t^2}} = -\sqrt{6-t^2} + 4\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= -\sqrt{5+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx .$$

Этот интеграл приводится к одному из табличных интегралов 15, 16, если в квадратном трехчлене ax^2+bx+c выделить квадрат двучлена.

Пример 4.

$$\int\sqrt{1-2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{2-(x+1)^2}\,dx=\int\sqrt{2-(x+1)^2}\,d(x+1)=$$

$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

§ 10. Понятие определенного интеграла

I. Задача о работе силы

Пусть материальная точка под действием некоторой силы перемещается пор оси Ox от точки a до точки b (рис. 73).

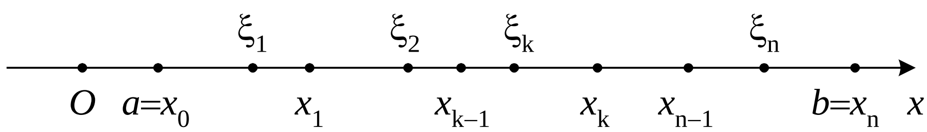


Рис. 73

Силу, действующую на материальную точку в положении x, обозначим через $F(x)$.

Кроме того, будем предполагать, что направление силы совпадает с направлением перемещения материальной точки, т.е. сила параллельна оси Ox.

Вычислим работу силы $F(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Известно, что если сила постоянна, то работа силы равна произведению силы на путь. Рассмотрим случай, когда сила $F(x)$ не является постоянной на отрезке $[a;b]$.

В этом случае с понятием работы силы мы не знакомы. Поэтому мы должны вначале определить понятие работы силы, убедиться в его существовании, а затем уже выработать аппарат для вычисления работы.

Разделим отрезок $[a;b]$ на n частей (не обязательно равных) точками:

$$a<x_0<x_1<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_n=b.$$

Эти точки разбивают отрезок $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Длины частичных отрезков обозначим следующим образом: $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Длину наибольшего частичного отрезка обозначим через λ.

На каждом частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ возьмем совершенно произвольную точку ξ_k.

Сила, действующая на материальную точку в положении ξ_k равна $F(\xi_k)$.

Отвлекаясь от реальности, будем считать силу постоянной на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ и равной $F(\xi_k)$.

Работу такой силы мы вычислять умеем. Она равна $F(\xi_k)\cdot\Delta x_k$.

Будем поступать так на каждом частичном отрезке. Получим сумму элементарных работ:

$$F(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + F(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + F(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\cdot\Delta x_k\,. \qquad (1)$$

Работу A силы $F(x)$ на отрезке $[a;b]$ естественно определить как предел суммы (1) при $\lambda \to 0$.

$$A = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\cdot\Delta x_k\,. \qquad (2)$$

II. Определение определенного интеграла

Задача о работе силы и другие задачи приводят нас к необходимости изучать пределы вида (2). Займемся этим вопросом.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $f(x)$ (не обязательно непрерывная).

Разделим отрезок $[a;b]$ на n частей (не обязательно равных) точками:

$$a < x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b\,.$$

Совокупность этих точек назовем разбиение T отрезка $[a;b]$.

Эти точки разбивают отрезок $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Длины частичных отрезков обозначим следующим образом: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Длину наибольшего частичного отрезка обозначим через λ.

На каждом частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ возьмем совершенно произвольную точку ξ_k и рассмотрим значение данной функции в этой точке $f(\xi_k)$.

Составим теперь следующую сумму:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\,.$$

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** (***Римана***) для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Отметим, что интегральная сумма σ зависит от разбиения T и от выбора точек ξ_k.

В случае, когда $f(x)\geq 0$ на отрезке $[a;b]$, интегральная сумма имеет следующий геометрический смысл: это есть сумма площадей прямоугольников, указанных на рисунке 74.

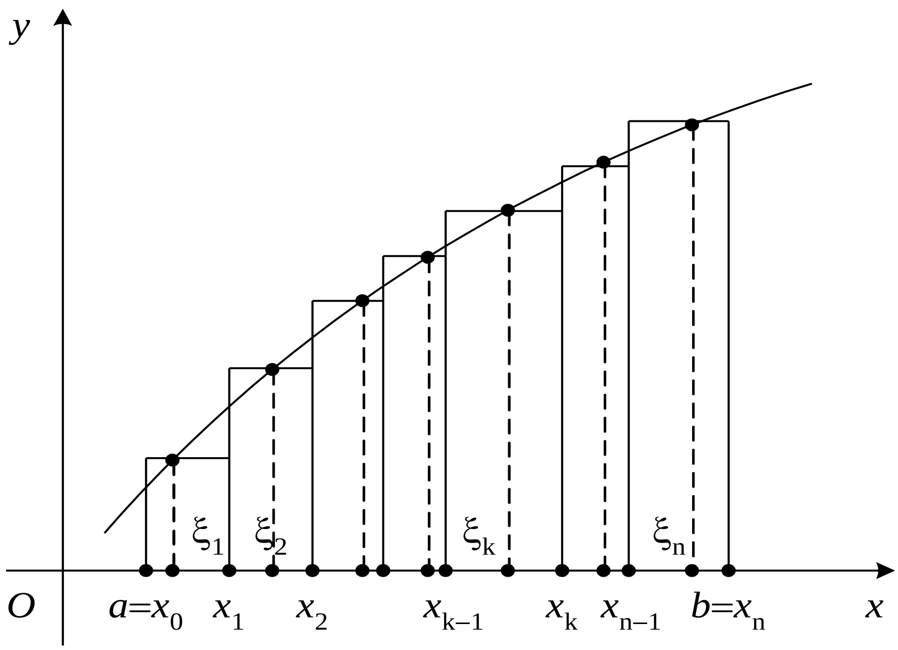


Рис. 74

Определение. Если существует предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a;b]$. Указанный предел I называется определенным интегралом функции $f(x)$ от a до b (или на отрезке $[a;b]$) и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

Такое обозначение введено французским математиком Фурье.

a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $x-$ переменной интегрирования.

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Пример. Рассмотрим на отрезке $[a;b]$ функцию $f(x) = c$ ($c -$какое-нибудь действительное число).

Рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a;b]$ и составим интегральную сумму σ, соответствующую этому разбиению:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} c \cdot \Delta x_k = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b-a)$$

при любом выборе точек ξ_k. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = c(b-a)$, т.е. $\int\limits_a^b cdx = c(b-a)$.

Замечание 1. Определенный интеграл есть число, не зависящее от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(u)du .$$

Замечание 2. Интегрируемыми на отрезке $[a;b]$ могут быть лишь функции, ограниченные на этом отрезке. Иными словами, если функция не ограничена на отрезке $[a;b]$, то она не интегрируема на этом отрезке.

Возникает вопрос: всякая ли функция, ограниченная на отрезке $[a;b]$, интегрируема на этом отрезке?

Теорема. Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$. То она интегрируема на этом отрезке.

Замечание 3. Если воспользоваться определением определенного интеграла, то формулу (2) мы можем записать так:

$$A = \int_a^b F(x)dx .$$

Замечание 4. Несколько выше мы выяснили геометрический смысл интегральной суммы $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$. Интуитивно ясно, что если функция $f(x) \geq 0$ и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ равен площади P фигуры, ограниченной графиком данной функции и прямыми $x = a, x = b, y = 0$:

$$P = \int_a^b f(x)dx .$$

§ 11. Свойства определенного интеграла

В § 10 было введено понятие определенного интеграла для случая, когда нижний предел интегрирования меньше верхнего предела.

Определим теперь понятие определенного интеграла для случая, когда нижний предел интегрирования больше либо равен верхнему пределу.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a < b)$, т.е. существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

По определению положим:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx ,$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Свойство 1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то функция $f(x) \pm \varphi(x)$ также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx .$$

Свойство 2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, c – постоянная, то функция $c \cdot f(x)$ также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx .$$

Свойство 3. При любом расположении точек a, b, c имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

при условии, что рассматриваемые здесь интегралы существуют.

Свойство 4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и всюду на этом отрезке $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$), то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ $\left(\int_a^b f(x)dx \leq 0\right)$.

Свойство 5. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и всюду на этом отрезке $f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx .$$

Свойство 6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и всюду на этом отрезке $m \leq f(x) \leq M$,
то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) .$$

Свойство 7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ $(a < b)$, то имеет место неравенство

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx .$$

Свойство 8 (*обобщенная теорема о среднем значении*). Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, функция $\varphi(x)$ не меняет знак на этом отрезке, то на данном отрезке существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b (f(x) \cdot \varphi(x))dx = f(\xi) \cdot \int_a^b \varphi(x)dx .$$

Следствие (*теорема о среднем значении*). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на данном отрезке существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a) .$$

§ 12. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной для непрерывной функции

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда она интегрируема на любом отрезке $[a;x]$, где $a \le x \le b$, т.е. для любой точки $x \in [a;b]$ существует интеграл $\int\limits_a^x f(x)dx$.

Так как переменную интегрирования можно обозначать любой буквой, то, обозначив ее буквой t, получим $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Положим $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Отметим, что функция $\Phi(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, она называется определенным интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция $\Phi(x)$ в каждой точке x отрезка $[a;b]$ имеет производную, равную $f(x)$:

$$\Phi'(x) = f(x),$$

т.е.

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке для нее существует первообразная.

§ 13. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $F(x)$ – какая-нибудь ее первообразная на этом отрезке. Тогда имеет место следующая формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Пример. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1.$

§ 14. Интегрирование по частям

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ – непрерывны на отрезке $[a;b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные $u'(x)$, $v'(x)$. Тогда имеет место следующая формула:

$$\int_a^b u dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Пример.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, \cos x dx = dv, \\ v = \sin x, du = dx \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1 .$$

§ 15. Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле

Теорема. Пусть

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)\le\varphi(\beta)=b$ $(\alpha\le t\le\beta)$.

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt . \qquad (1)$$

Формула (1) называется формулой замены переменной (подстановки) в определенном интеграле.

Пример. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \begin{vmatrix} x = a\sin t, dx = a\cos t dt, \\ x=0 \text{ при } t=0, x=a \text{ при } t=\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

§ 16. Геометрические приложения определенных интегралов

I. Вычисление площадей плоских фигур

Пусть функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$, является непрерывной и неотрицательной на этом отрезке. Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком данной функции и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Эта фигура называется криволинейной трапецией.

Теорема 1. Криволинейная трапеция является квадрируемой фигурой. Ее площадь P можно вычислить с помощью формулы

$$P = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Пример 1. Рассмотрим круг радиуса r (рис. 75).

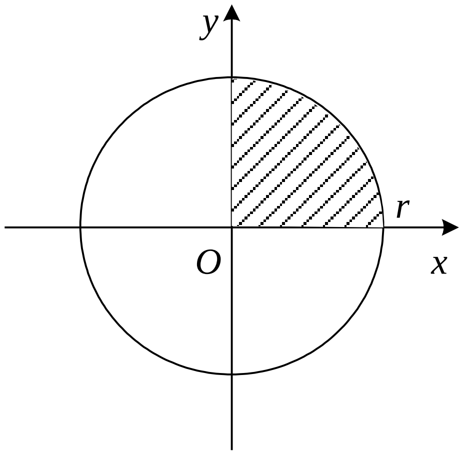


Рис. 75

Вычислим площадь данного круга. Сначала вычислим площадь P_1 четвертой части круга.

Используя формулу (1), будем иметь:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = r\cos t, dx = -r\sin t dt, \\ x = 0 \text{ при } t = \dfrac{\pi}{2}, x = r \text{ при } t = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-r^2 \sin^2 t)dt = \frac{r^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Отсюда следует, что площадь круга $P = \pi r^2$.

Замечание 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Полагаем, что функция $y = f(x)$ является непрерывной на данной отрезке и на этом отрезке $f(x) \le 0$. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком данной функции и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 76).

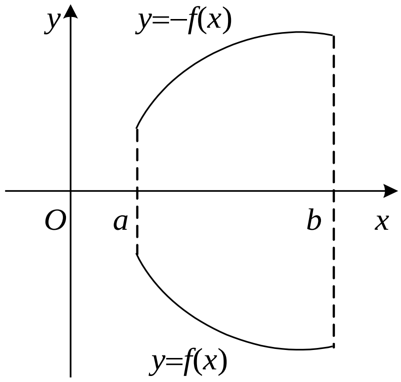


Рис. 76

Площадь рассматриваемой фигуры равна

$$P = -\int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 1$ (рис. 5).

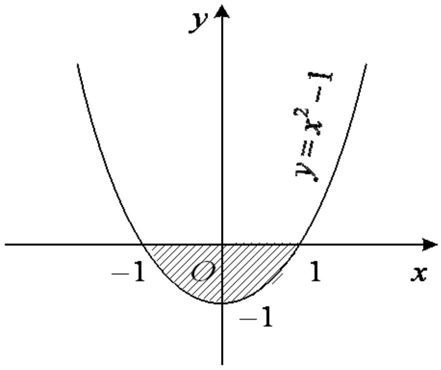


Рис. 5

Решение. $P = -\int_{-1}^{1}(x^2 - 1)dx = \left(-\dfrac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = -\dfrac{1}{3} + 1 - \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$ (кв. ед.)

Замечание 2. Иногда необходимо вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции, непрерывной на некотором отрезке и меняющей знак конечное число раз на этом отрезке.

Вычисление площади в этом случае сводится к использованию формул (1) и (2) и свойства аддитивности площади.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 1$ и прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ (рис. 77).

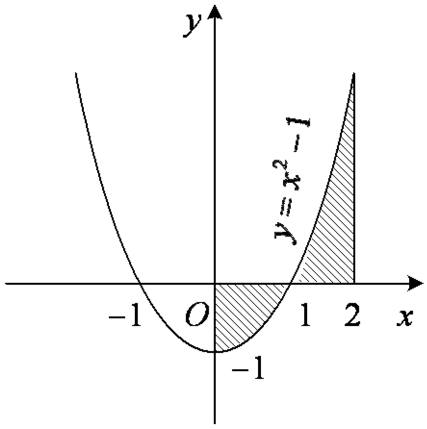


Рис. 77

Решение. $P_1=-\int\limits_0^1(x^2-1)dx=\frac{2}{3}$, $P_2=\int\limits_1^2(x^2-1)dx=\frac{4}{3}$, $P=P_1+P_2=2$ (кв. ед.).

Замечание 3. Пусть функции $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим фигуру, ограниченную графиками данных функций и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 78).

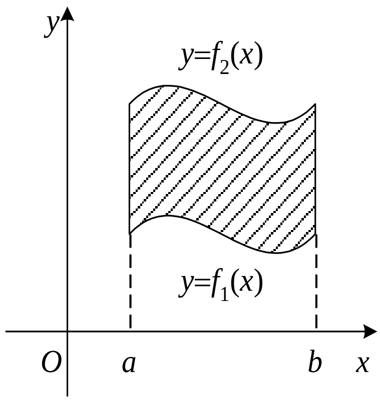


Рис. 78

Площадь рассматриваемой фигуры вычисляется следующим образом:

$$P=\int\limits_a^b(f_2(x)-f_1(x))dx. \tag{3}$$

Пример 4. Вычислить площадь P фигуры, ограниченной графиками функций $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ (рис. 79).

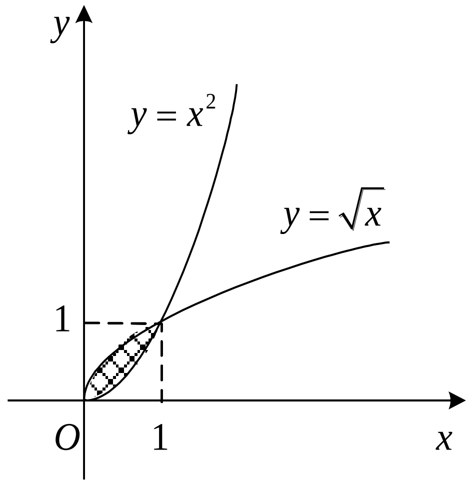


Рис. 79

Решение. $P = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ (кв. ед.).

Замечание 4. Рассмотрим кривую AB, заданную параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Пусть уравнения определяют функцию $y = f(x)$ аргумента x, непрерывную и неотрицательную на отрезке $[a;b]$.

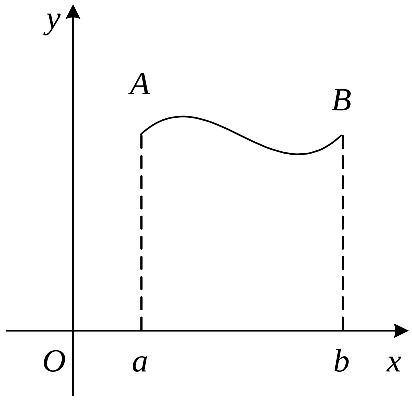


Рис. 80

Площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой AB (рис. 80) вычисляется следующим образом:

$$P = \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt. \tag{4}$$

Новые пределы интегрирования находятся из уравнений: $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$.

Пусть $r = f(\varphi)$ – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[\alpha;\beta]$ функция. В полярной системе координат графиком этой функции является некоторая кривая. Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную этой кривой и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$. Эту фигуру будем называть криволинейным сектором.

Теорема 2. Криволинейный сектор является квадрируемой фигурой. Его площадь P можно вычислить при помощи следующей формулы:

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi . \qquad (5)$$

II. Вычисление объемов некоторых тел

Рассмотрим тело (V), расположенное между плоскостями $x = a$, $x = b$. Будем пересекать его плоскостями, перпендикулярными оси Ox. Полагаем, что все сечения представляют собой квадрируемые фигуры, и что $P(x)$ – площадь сечения, соответствующего абсциссе x, представляет собой непрерывную на отрезке $[a;b]$ функцию.

Теорема 3. Рассматриваемое тело (V) является кубируемым, а его объем V можно найти по следующей формуле:

$$V = \int_a^b P(x)dx . \qquad (6)$$

Пример 5. Вычислить объем пирамиды с площадью основания P и высотой H.

Решение. Через вершину O проводим ось, перпендикулярную плоскости основания. Назовем ее осью Ox. На этой оси возьмем точку x и проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную оси Ox. Площадь полученного при этом сечения обозначим через $P(x)$ (рис. 81).

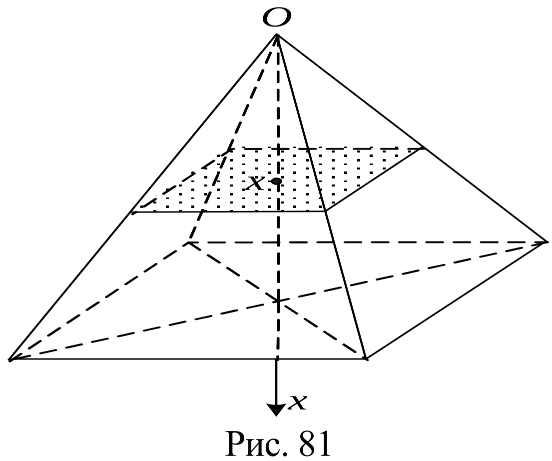


Рис. 81

Из элементарной геометрии известно, что $\dfrac{P(x)}{P} = \dfrac{x^2}{H^2}$, откуда $P(x) = \dfrac{P}{H^2}x^2$.

Используя формулу (6), получаем:

$$V = \int_0^H \frac{P}{H^2}x^2 dx = \frac{P}{H^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^H = \frac{1}{3}PH .$$

Замечание 5. Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию. Ограниченную графиком данной функции и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Данную криволинейную трапецию будем крутить вокруг оси Ox. Полученное при этом тело назовем телом вращения (рис. 82).

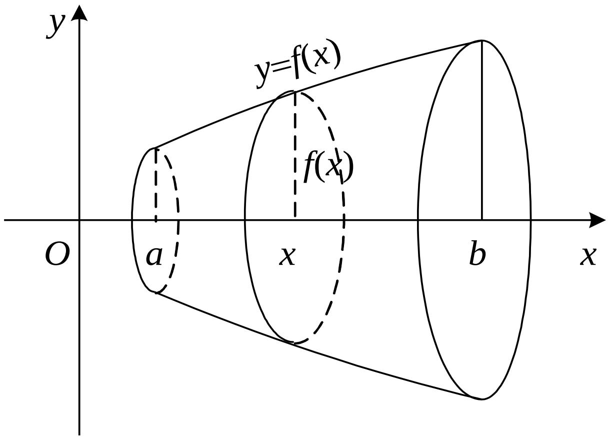


Рис. 82

Объем V этого тела вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример 6. Вычислить объем шара радиуса r.

Решение. Шар радиуса r мы получим, если полукруг, ограниченный полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и прямой $y = 0$, будем вращать вокруг оси Ox (рис. 83).

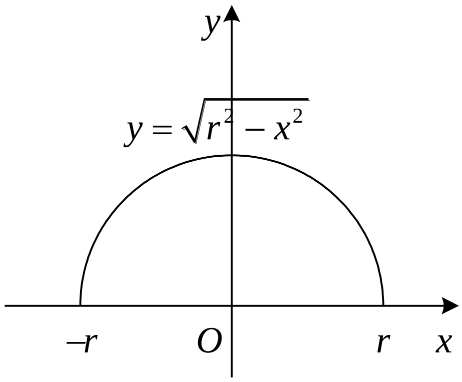


Рис. 83

Имеем

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

III. Вычисление длин дуг

Пусть плоская кривая AB задана уравнение $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция на промежутке $[a;b]$.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ на отрезке $[a;b]$, то кривая AB является спрямляемой. А ее длина выражается формулой $s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

§ 17. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы первого рода

Рассмотрим примеры, приводящие к таким интегралам.

Пример 1. Найти площадь P под кривой $y = \frac{1}{x}$, $x \ge a > 0$ (рис. 84).

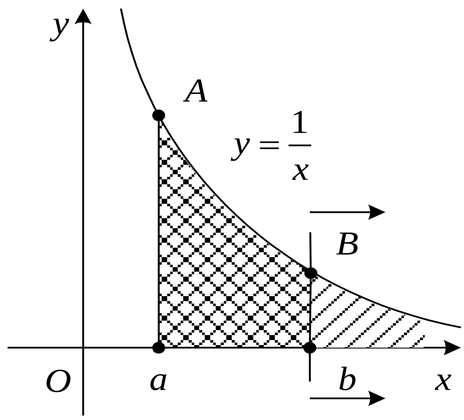


Рис. 84

Решение. Площадь всей заштрихованной фигуры непосредственно вычислить сложно. Но, если отсечь бесконечный «хвост» прямой $x = b$, то площадь криволинейной трапеции $aABb$ можно вычислить при помощи определенного интеграла $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$.

При $b \to +\infty$ мы должны получить площадь P всей заштрихованной фигуры, т.е. $P = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln|x| \Big|_a^b = \lim\limits_{b \to +\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty$.

Таким образом, в данном случае нет смысла говорить о площади.

Пример 2. Найти площадь P под кривой $y = \frac{1}{x^2}$, $x \ge a > 0$.

Решение. Рассуждая аналогичным образом, как и в примере 1, будем иметь

$$P = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_a^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a}.$$

Значит, в данном случае площадь бесконечного «хвоста» равна $\frac{1}{a}$.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$. Тогда конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ (если он существует) называется несобственным интегралом первого рода и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Аналогичным образом определяются следующие несобственные интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx. \tag{3}$$

Если существует предел (1), то говорят, что несобственный интеграл (1) сходится. Если же предел (1) не существует или бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Например, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}$ в примере 1 расходится, а несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ из примера 2 сходится.

Заметим, что несобственный интеграл в левой части равенства (3) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из несобственных интегралов в правой части.

Пример 3. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2} =$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^0 + \lim\limits_{b\to+\infty} arctgx\Big|_0^b = \lim\limits_{a\to-\infty}(-arctga) + \lim\limits_{b\to+\infty} arctgb = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$,

т.е. данный интеграл сходится.

Очень часто, когда необходимо определить, сходится или расходится несобственный интеграл, не вычисляя его, пользуются следующими признаками сходимости.

Теорема 1. Пусть при $x \ge a$ $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Если $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx \ge \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$.

Теорема 2. Пусть при $x \ge a$ $|f(x)| \le \varphi(x)$, $\varphi(x) \ge 0$. Тогда если $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Определение 2. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется условно сходящимся, если он сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Решение. Очевидно, что при $x > 2$ $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} > \frac{1}{x}$.

Вычислим $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln|b| - \ln|a|) = +\infty$.

Так как несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, то по теореме 1 расходящимся будет и интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

Замечание 1. Все понятия и утверждения, сформулированные для несобственных интегралов вида (1), остаются верными и для интегралов вида (2) и (3).

Несобственные интегралы второго рода

Пример 5. Найти площадь P под кривой $y=\frac{1}{x}$, $0\le x\le 1$ (рис. 85).

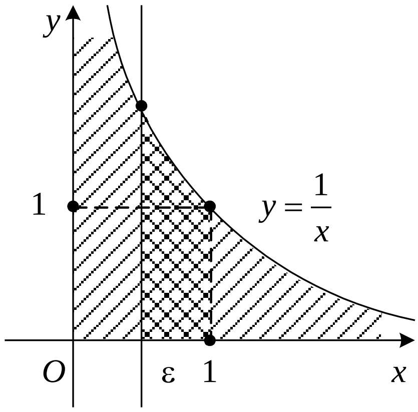


Рис. 85

Функция $y=\frac{1}{x}$ имеет бесконечный разрыв при $x=0$. Площадь всей заштрихованной фигуры непосредственно вычислить сложно. Но, если отсечь бесконечный «хвост» прямой $x=\varepsilon$, то можно найти площадь дважды заштрихованной криволинейной трапеции. Она равна $\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}$. В пределе при $\varepsilon\to 0$ мы должны получить искомую площадь, т.е.

$$P=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{1}{\varepsilon}=+\infty.$$

Таким образом, в данном случае нет смысла вести разговор о площади.

Пример 6. Найти площадь P под кривой $y=\frac{1}{\sqrt{b-x}}$, $0\le x\le b$ (рис. 86).

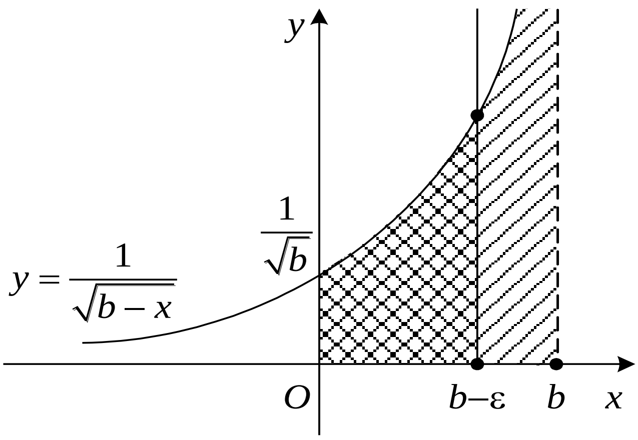


Рис. 86

Решение. Функция $y=\frac{1}{\sqrt{b-x}}$ в точке $x=b$ неопределенна. Будем рассуждать, как и в примере 5. Имеем

$$P=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{b-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{b-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}(-2\sqrt{b-x}\Big|_0^{b-\varepsilon})=2\lim_{\varepsilon\to 0}(\sqrt{b}-\sqrt{\varepsilon})=2\sqrt{b}\,.$$

Таким образом, площадь бесконечного «хвоста» в данном случае равна $2\sqrt{b}$.

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;b)$, а в точке $x=b$ или неопределенная, или имеет разрыв. Тогда конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (если он существует) называется несобственным интегралом второго рода, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,. \tag{4}$$

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл в тех случаях, когда подынтегральная функция $f(x)$ неопределенная или имеет разрыв при $x=a$:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\,, \tag{5}$$

или при $x=c\in(a;b)$:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx\,. \tag{6}$$

Заметим, что, если существует конечный предел (4). То говорят, что несобственный интеграл (4) сходится. Если предел (4) не существует или бесконечный, то говорят, что интеграл (4) расходится.

Пример 7. Вычислить $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2}\,.$$

Теорема 3. Пусть при $x\in[a;b)$ $0\le f(x)\le\varphi(x)$ и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ или неопределенные, или имеют разрыв при $x=b$. Если $\int\limits_a^b\varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^b\varphi(x)dx$.

Теорема 4. Пусть при $x\in[a;b)$ $|f(x)|\le\varphi(x)$, $\varphi(x)\ge 0$ и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ или неопределенные, или имеют разрыв при $x=b$. Если $\int\limits_a^b\varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Понятие функции нескольких переменных. Область определения функции. Линии и поверхности уровня функции

I. Понятие функции нескольких переменных

Определение 1. m-мерным координатным пространством называется множество всевозможных упорядоченных совокупностей $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ m действительных чисел $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$. Каждую такую упорядоченную совокупность m действительных чисел будем называть точкой m-мерного координатного пространства и обозначать одной буквой, например, x: $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$.

Числа $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ называются координатами точки x.

Определение 2 m-мерное координатное пространство называется m-мерным евклидовым пространством E_m, если между двумя любыми ее точками $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m)$ определено расстояние $\rho(x, y)$ по следующей формуле:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + ... + (\xi_m - \eta_m)^2}\ .$$

При этом точки m-мерного координатного пространства будем называть точками m-мерного евклидова пространства.

Точки пространства E_m будем обозначать следующим образом: $M(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$. В случае $m = 1,2,3$ будем пользоваться соответственно следующими обозначениями: $M(x)$, $M(x, y)$, $M(x, y, z)$.

Пусть E – какое-нибудь множество точек пространства E_m.

Определение 3. Если каждой точке M из множества E точек m-мерного евклидова пространства поставлено в соответствие одно определенное действительное число u, то говорят, что на множестве E задана функция $u = f(M)$.

При этом множество E называется областью определения данной функции.

Данную функцию называют также функцией точки M. Её обозначают также следующим образом: $u = f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ и называют функцией m переменных $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$.

В случае $m = 1,2,3$ будем пользоваться соответственно следующими обозначениями:

$$y = f(M),\ y = f(x);\ z = f(M),\ z = f(x, y);\ u = f(M),\ u = f(x, y, z).$$

Замечание 1. Если функция m переменных задана формулой, то под областью определения этой функции понимают множество тех точек m-мерного евклидова пространства E_m, для которых данная формула имеет смысл.

Пример 1. Выразить объем конуса V как функцию его образующей x и радиуса основания y.

Решение. Из геометрии известно, что объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi y^2 h$, где h – высота конуса. Но $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. Таким образом, $V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$. Это и есть искомая функциональная зависимость.

Пример 2. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Решение. Область определения D будет состоять из всех точек плоскости, для которых $1 - x^2 - y^2 \ge 0$, откуда получаем $x^2 + y^2 \le 1$. Это неравенство определяет замкнутый круг радиуса 1 с центром в начале координат $O(0;0)$ (рис. 87).

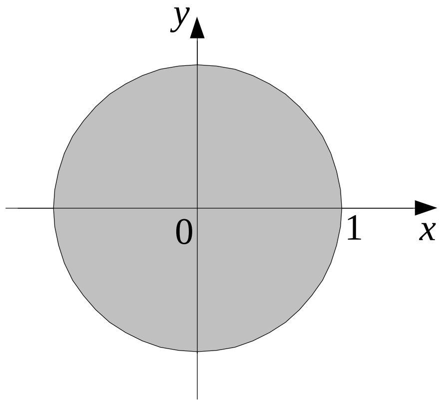


Рис. 87

Пример 3. Найти область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Решение. Первое слагаемое определено при $4 - x^2 \ge 0$ или $x^2 \le 4$. Второе слагаемое имеет действительные значения, если $1 - y^2 \ge 0$, т.е. $y^2 \le 1$. Таким образом, функция определена для всех точек (x, y) плоскости, для которых $\begin{cases} x^2 \le 4, \\ y^2 \le 1, \end{cases}$ откуда получаем $\begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ -1 \le y \le 1. \end{cases}$

Область определения заданной функции изображена на риссунке 88 и включает границы области.

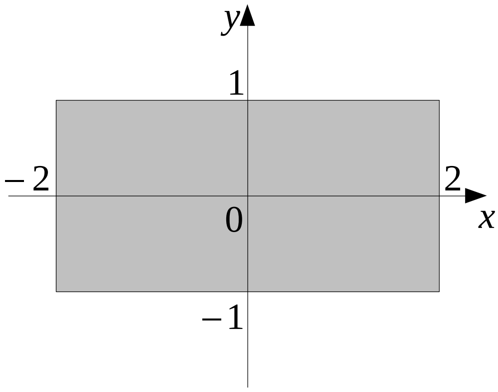


Рис. 88

II. График функции двух переменных

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, областью определения которой является множество E. Множество E геометрически изображается, как некоторое множество точек плоскости xOy.

Возьмем произвольную точку (x, y) из этого множества и найдем значение функции: $z = f(x, y)$. Построим точку $P(x, y, z)$, где $z = f(x, y)$.

Множество всех построенных таким образом точек P называется графиком данной функции.

III. Линии уровня функции двух переменных

Определение 4. Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = c$, во всех точках которой данная функция имеет одно и то же значение $z = c$.

Иначе говоря, линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется проекция на плоскость xOy линии пересечения графика данной функции плоскостью $z = c$.

Заметим, что, когда мы исследуем линии уровня какой-нибудь функции, мы получаем представление о графике данной функции.

Пример 4. Найти линии уровня функции $z = \dfrac{1}{9x^2 + 16y^2}$.

Решение. Согласно с определение линии уровня $f(x, y) = c$, где $c = const$, имеем совокупность эллипсов $\dfrac{1}{9x^2 + 16y^2} = c$ или $\dfrac{x^2}{\frac{1}{9c}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{16c}} = 1$ с центром в начале координат и полуосями $a = \dfrac{1}{3\sqrt{c}}$, $b = \dfrac{1}{4\sqrt{c}}$.

§ 2. Понятие предела функции нескольких переменных

Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_m^0)$, кроме, может быть, самой точки M_0.

Определение 1. Число A называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0 (или при $M \to M_0$), если для любой последовательности $\{M_n\}$, сходящейся к M_0, и членами отличными от M_0, соответствующая последовательность $\{f(M_n)\}$ значений данной функции сходится к числу A.

Определение 1 равносильное следующему определению.

Определение 2. Число A называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0 (или при $M \to M_0$), если для любого число $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех точек M, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, выполняется неравенство $\left| f(M) - A \right| < \varepsilon$.

Если A – предел функции $f(M)$ в точке M_0, то этот факт записывают так: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ или $\lim\limits_{\substack{\xi_1 \to \xi_1^0 \\ \xi_2 \to \xi_2^0 \\ \dots\dots\dots \\ \xi_m \to \xi_m^0}} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = A$.

Теорема 1. Если существуют пределы функций $f(M)$ и $\varphi(M)$ при $M \to M_0$, то функции $f(M) \pm \varphi(M)$, $f(M) \cdot \varphi(M)$, $\dfrac{f(M)}{\varphi(M)}$ (частное при условии, что $\lim\limits_{M \to M_0} \varphi(M) \neq 0$) при $M \to M_0$ также имеют пределы, причем

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) \pm \varphi(M)) = \lim_{M \to M_0} f(M) \pm \lim_{M \to M_0} \varphi(M),$$

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) \cdot \varphi(M)) = \lim_{M \to M_0} f(M) \cdot \lim_{M \to M_0} \varphi(M),$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{\varphi(M)} = \frac{\lim\limits_{M \to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M \to M_0} \varphi(M)}.$$

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2}$.

Решение. Данный предел находится при условии $M(x; y) \to (0; 2)$. Расстояние между этими точками $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$, поэтому

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\sqrt{\rho^2 + 1} - 1}{\rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{(\rho^2 + 1) - 1}{\rho^2 (\sqrt{\rho^2 + 1} + 1)} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не существует.

Решение. Пусть переменная точка $M(x; y) \to O(0; 0)$ по прямой $y = kx$, где $k = const$. Имеем $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \dfrac{k}{1 + k^2}$. При стремлении точки $M(x; y)$ к началу координат по разным прямым данная функция $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ будет иметь разные предельные значения, а значит, функция не имеет предела в точке $O(0; 0)$.

Определение 3. Функция α называется бесконечно малой в точке M_0 (или при $M \to M_0$), если $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = 0$.

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f(M)$ в точке M_0 имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было записать в следующем виде:

$$f(M) = A + \alpha(M),$$

где $\alpha(M)$ – бесконечно малая функция в точке M_0.

§ 3. Понятие непрерывности функции нескольких переменных. Основные свойства непрерывных функций

Пусть функция $u = f(M)$ определена в точке $M_0(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_m^0)$ и некоторой окрестности этой точки.

Определение 1. Функцыя $u = f(M)$ называется непрерывной в точке $M_0(\xi_1^0, \xi_2^0, ..., \xi_m^0)$, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется непрерывной в этой области.

Определение 2. Пусть дана функция $u = f(M)$, областью определения которой является множество $E \subset E_m$. Точки множества E, в которых данная функция является непрерывной, называются точками непрерывности данной функции. Точки множества E, в которых данная функция не является непрерывной, называются точками разрыва данной функции.

Пример 1. $z = \dfrac{xy + x^2}{x^2 - y}$. Область определения функции $z = \dfrac{xy + x^2}{x^2 - y}$ – множество всех точек плоскости, кроме точек, лежащих на линии (параболе) $y = x^2$. Во всех точках своей области определения данная функция является непрерывной. Множеством точек разрыва данной функции будет линия $y = x^2$. Говорят, что данная функция имеет линию разрыва.

Теорема 1. Пусть функции $f(M)$, $\varphi(M)$ определены на множестве $E \subset E_m$. Если данные функции непрерывны в точке $M_0 \in E$, то непрерывными в этой точке являются также следующие функции: $f(M) \pm \varphi(M)$, $f(M) \cdot \varphi(M)$, $\dfrac{f(M)}{\varphi(M)}$ (частное при условии, что $\varphi(M_0) \neq 0$).

Теорема 2. Пусть функции $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ непрерывны в точке x_0, а функция $z = f(u, v)$ непрерывна в соответствующей точке (u_0, v_0), где $u_0 = \varphi(x_0)$, $v_0 = \psi(x_0)$. Тогда функция $z = f(\varphi(x), \psi(x))$ будет непрерывной в точке x_0.

Функция $z = f(\varphi(x), \psi(x))$ называется сложной функцией. Она обозначается также следующим образом: $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$.

Теорема 3. Пусть функции $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), а функция $z = f(u, v)$ непрерывна в соответствующей точке (u_0, v_0), где $u_0 = \varphi(x_0, y_0)$, $v_0 = \psi(x_0, y_0)$. Тогда функция $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ будет непрерывной в точке (x_0, y_0).

Функция $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ называется сложной функцией. Ее обозначают также так: $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.

§ 4. Частные производные функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области E. Рассмотрим произвольную точку (x, y) этой области. Дадим x приращение Δx. Получим точку $(x + \Delta x, y)$. Будем полагать, что точка $(x + \Delta x, y)$ также принадлежит области E.

Рассмотрим разность $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$.

Будем называть ее частным приращением данной функции по x.

Составим отношение $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$.

Определение 1. Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то он называется частной производной по x функции $f(x, y)$ в точке (x, y) и обозначается следующим образом: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, или $f'_x(x, y)$.

Таким образом, согласно определению

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется и обозначается частная производная по y функции $f(x, y)$ в точке (x, y):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Замечание 1. Из определения понятно, что частная производная по x функции $f(x, y)$ представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном y. Аналогичное можно отметить про частную производную функции $f(x, y)$ по y. Отсюда следует, что частные производные можно вычислять при помощи тех же правил, что и обыкновенные производные.

Пример 1. Найти частные производные функции $z = e^{\sin\frac{x}{y}}$.

Решение. Если рассматривать y как постоянную величину, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\sin\frac{x}{y}} \cdot \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot \cos\frac{x}{y} \cdot e^{\sin\frac{x}{y}}.$$

Аналогично, если рассматривать x как постоянную, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\sin\frac{x}{y}} \cdot \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{x}{y^2} \cdot \cos\frac{x}{y} \cdot e^{\sin\frac{x}{y}}.$$

Пример 2. Найти частные производные функции трех аргументов $u = x^3y^2z + 3x + 2y + 1$.

Решение. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z + 3$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz + 2$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2$.

Замечание 2. Аналогичным образом определяются, обозначаются и вычисляются частные производные функции любого числа переменных.

§ 5. Понятие дифференцируемости и дифференциала функции нескольких переменных

I. Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области *E*. В этой области рассмотрим какую-нибудь точку (x, y). Дадим *x* приращение Δx, *y* – приращение Δy. Получим точку $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Будем полагать, что эта точка также принадлежит области *E*. Рассмотрим полное приращение данной функции в точке (x, y): $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Определение 1. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x, y), если ее полное приращение в этой точке можно записать в следующем виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{1}$$

где *A*, *B* – некоторые числа, независящие от ад Δx, Δy; α, β – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Равенство (1) называется условием дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y).

Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), то она непрерывна в этой точке.

Теорема 2. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), то в этой точке существуют обе частные производные, причем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Следствие. Условие дифференцируемости (1) можно записать в следующем виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{2}$$

где α, β – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Теорема 3. Если в некоторой окрестности точки (x, y) функция $z = f(x, y)$ имеет обе частные производные и, кроме того, эти частные производные непрерывны в точке (x, y), то данная функция дифференцируема в рассматриваемой точке.

II. Понятие дифференциала функции нескольких переменных

Определение 2. Дифференциалом функции $z = f(x, y)$, дифференцируемой в точке (x, y), называется следующее выражение:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \qquad (3)$$

Обозначим $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ и назовем эти величины дифференциалами независимых переменных.

Тогда равенство (3) можно записать в следующем виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (4)$$

Пример 1. Рассмотрим функцию $z = xy^3$. Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3xy^2.$$

Дифференциал рассматриваемой функции равен $dz = y^3dx + 3xy^2dy$.

Замечание 1. Используя формулу (4), равенство (2) можно записать в следующем виде:

$$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y. \qquad (5)$$

Равенство (5) можно также записать в виде

$$\Delta z = dz + 0(\rho). \qquad (6)$$

Здесь $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

III. Использование дифференциала в приближенных вычислениях

Как было отмечено выше, дифференциал функции связан с ее приращением формулой (6). Часто величиной $0(\rho)$ пренебрегают. Получая при этом приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz. \qquad (7)$$

Таким образом, приращение функции заменяют ее дифференциалом.

Пример 2. Высота конуса H=10см, радиус основания R=5см. Как изменится объем конуса, если высоту увеличить на 2мм и уменьшить радиус основания на 2мм?

Решение. Объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Изменение объема приближенно заменим его дифференциалом $\Delta V \approx dV = \frac{1}{3}\pi\left(2RH\Delta R + R^2\Delta H\right)$.

Подставив значения (в см) R=5, H=10, $\Delta R = -0{,}2$, $\Delta H = 0{,}2$, получим

$$\Delta V \approx \frac{1}{3}\pi\left(2\cdot 5\cdot 10(-0{,}2) + 25\cdot 0{,}2\right) = -5\pi \approx -15{,}7.$$

Таким образом, объем конуса уменьшится примерно на 15,7см^3.

Пример 3. Вычислить приближенно число $a = (1{,}04)^{2{,}03}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^y$. Число a есть значение данной функции в точке $(x + \Delta x; y + \Delta y)$ при $x = 1, y = 2,\ \Delta x = 0{,}04$, $\Delta y = 0{,}03$.

Дифференциал данной функции $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y.$

Его значение в точке $(1; 2)$ при данных приращениях независимых переменных

$$df(1; 2) = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}03 = 0{,}08,$$

поэтому по формуле (7) имеем

$$a = f(1{,}04; 2{,}03) \approx f(1; 2) + df(1; 2) = 1 + 0{,}08 = 1{,}08.$$

Замечание 2. В данном параграфе мы рассматривали функции двух переменных. Вся изложенная теория легко переносится на функции любого числа переменных.

§ 6. Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ в каждой точке области E имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x'(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y'(x, y).$$

Эти частные производные являются функциями от x, y, определенными в области E. Может случиться, что функции $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в некоторых точках области E также имеют частные производные по x и по y.

Определение. Частные производные по x и по y функций $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ называются частными производными второго порядка для функции $z = f(x, y)$ и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}''(x, y) = f_{x^2}''(x, y) = z_{x^2}'',$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}''(x, y) = z_{xy}'',$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}''(x, y) = z_{yx}'',$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}''(x, y) = f_{y^2}''(x, y) = z_{y^2}''.$$

Исходя из частных производных второго порядка, аналогично можно определить частные производные третьего, четвертого и т.д. порядков.

Обратим наше внимание на частные производные функции $z = f(x, y)$, взятые по разным переменным: f_{xy}'', f_{yx}'', f_{xxy}''', f_{xyx}''', … .

Они называются смешанными частными производными данной функции.

Пример 1. Пусть $z = x^2 y + e^{x+y}$.

Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + e^{x+y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + e^{x+y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y + e^{x+y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + e^{x+y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x+y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2x + e^{x+y}.$$

Мы видим, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Возникает вопрос: случайно это или закономерно?

Теорема. Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет смешанные производные f_{xy}'', f_{yx}''. Если эти смешанные производные непрерывны в точке (x_0, y_0), то они равны между собой в этой точке: $f_{xy}''(x_0, y_0) = f_{yx}''(x_0, y_0)$.

Следствие. Если смешанные производные порядка $n > 2$ функции $z = f(x, y)$ отличаются между собой лишь порядком дифференцирования и непрерывны в некоторой точке, то они равны в этой точке.

Замечание. Мы определили частные производные высших порядков для функции двух переменных. Аналогично определяются частные производные высших порядков для функции любого числа переменных.

§ 7. Производные сложных функций

I. Пусть дана сложная функция $z = f(u, \upsilon)$, $u = \varphi(x)$, $\upsilon = \psi(x)$. Будем предполагать, что функции $u = \varphi(x)$ и $\upsilon = \psi(x)$ в некоторой точке x имеют производные $\dfrac{du}{dx} = \varphi'(x)$, $\dfrac{d\upsilon}{dx} = \psi'(x)$, а функция $z = f(u, \upsilon)$ в соответствующей точке (u, υ) дифференцируема.

Докажем, что при этих предположениях сложная функцияв точке x имеет производную $\dfrac{dz}{dx}$ и найдем формулу для ее вычисления.

Придадим x приращение Δx. Тогда функции u, υ, z получат соответственно приращения Δu, $\Delta \upsilon$, Δz. Так как функция $z = f(u, \upsilon)$ дифференцируема в точке (u, υ), то ее полное приращение в этой точке можно представить в следующем виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\Delta \upsilon + \alpha \Delta u + \beta \Delta \upsilon,$$

где α, β – бесконечно малые функции при $\Delta u \to 0$, $\Delta \upsilon \to 0$.

Отсюда следует:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}+\beta\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Перейдем в равенстве (1) к пределу при $\Delta x\to 0$. При этом будем учитывать следующие обстоятельства. Если $\Delta x\to 0$, то $\frac{\Delta u}{\Delta x}\to\frac{du}{dx}$; $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta x}\to\frac{d\upsilon}{dx}$; а величины $\frac{\partial z}{\partial u}$ иі $\frac{\partial z}{\partial \upsilon}$ являются постоянными.

Если $\Delta x\to 0$, то $\Delta u\to 0$, $\Delta\upsilon\to 0$ (функции $u=\varphi(x)$, $\upsilon=\psi(x)$ в точке x имеют производные, поэтому они непрерывные) и $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$.

Если учесть все сказанное выше и перейти к пределу в равенстве (1) к пределу при $\Delta x\to 0$, то получим

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{d\upsilon}{dx}. \qquad (2)$$

Таким образом, мы доказали, что сложная функция в точке x имеет производную и нашли формулу (2) для ее вычисления.

Пример 1. $z=(\mathrm{tg}x)^{\sin x}$.

Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию

$$z=u^{\upsilon},\ u=\mathrm{tg}x,\ \upsilon=\sin x.$$

Используя формулу (2), получим

$$\frac{dz}{dx}=\upsilon u^{\upsilon-1}\frac{1}{\cos^2 x}+u^{\upsilon}\ln u\cos x=\sin x(\mathrm{tg}x)^{\sin x-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+(\mathrm{tg}x)^{\sin x}\ln(\mathrm{tg}x)\cdot\cos x.$$

II. Пусть дана сложная функция

$$z=f(u,\upsilon),\ u=\varphi(x,y),\ \upsilon=\psi(x,y).$$

Будем предполагать, что в некоторой точке (x,y) функции $u=\varphi(x,y)$, $\upsilon=\psi(x,y)$ имеют обе частные производные, а функция $z=f(u,\upsilon)$ в соответствующей точке (u,υ) дифференцируема. Докажем, что в точке (x,y) сложная функция имеет обе частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и найдем формулы для их вычисления.

Сначала докажем существование частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ и найдем формулу для ее вычисления.

В этом случае y считается постоянным. Поэтому функции u и υ становятся функциями одной переменной x. Мы пришли к предыдущему случаю. Следовательно, можно утверждать, что производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ существует и для ее вычисления можем воспользоваться формулой (2), заменяя лишь в ней $\frac{du}{dx}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{d\upsilon}{dx}$ на $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$.

Получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}. \tag{3}$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\frac{\partial \upsilon}{\partial y}. \tag{4}$$

Полученный результат можно сформулировать в виде следующего правила: частная производная сложной функции равна сумме произведений частных производных данной функции по промежуточным аргументам на частные производные промежуточных аргументов по соответствующей независимой переменной.

Замечание. Сформулированное правило остается в силе для сложной функции любого числа переменных.

Пример 2. $z = e^{xy} \cdot \sin(x+y)$.

Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию $z = e^u \sin \upsilon$, $u = xy$, $\upsilon = x + y$.

Применяя формулы (3), (4), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^u \sin\upsilon \cdot y + e^u \cos\upsilon \cdot 1 = e^{xy}\sin(x+y)\cdot y + e^{xy}\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^u \sin\upsilon \cdot x + e^u \cos\upsilon \cdot 1 = e^{xy}\sin(x+y)\cdot x + e^{xy}\cos(x+y).$$

§ 8. Экстремумы функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области E и (x_0, y_0) – некоторая точка этой области.

Определение 1. Точка (x_0, y_0) называется точкой максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$, если ее можно окружить такой окрестностью, во всех точках (x, y) которой имеет место неравенство $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ $\left(f(x, y) \ge f(x_0, y_0)\right)$ (рис. 89).

Точки максимума и минимума называются точками экстремума функции. Значение функции в точке экстремума называется экстремумом функции. Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функцииі.

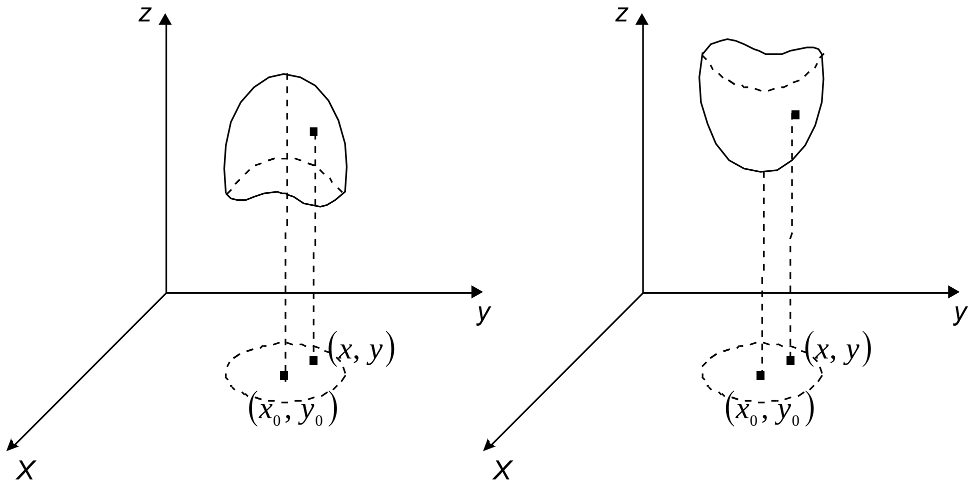


Рис. 89

Возникает вопрос: как находить точки экстремума? Большую помощь в этом оказывает следующая теорема.

Теорема 1 (*необходимое условие экстремума*). Пусть функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет частные производные первого порядка. Если точка (x_0, y_0) является точкой экстремума функции $z = f(x, y)$, то в этой точке обе частные производные данной функции равны нулю:

$$f_x'(x_0, y_0) = 0, \; f_y'(x_0, y_0) = 0.$$

Определение 2. Точка (x_0, y_0) называется стационарной точкой функции $f(x, y)$, если в этой точке обе частные производные равны нулю:

$$f_x'(x_0, y_0) = 0, \; f_y'(x_0, y_0) = 0.$$

Из теоремы 1 следует, что если функция $f(x, y)$ имеет обе частные производные в каждой точке области *E*, то точки экстремума данной функции следует искать лишь среди стационарных точек.

Заметим, что не всякая стационарная точка обязательно будет точкой экстремума. Стационарные точки – это подозрительные на экстремум точки.

Возникает вопрос: как среди стационарных точек найти точки экстремума? Здесь весьма полезна следующая теорема.

Теорема 2 (*достаточные условия экстремума*). Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядка в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), которая является стационарной точкой функции, т.е. в которой выполняются условия $f_x'(x_0, y_0) = 0$, $f_y'(x_0, y_0) = 0$.

Положим: $A = f_{x^2}''(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0, y_0)$, $C = f_{y^2}''(x_0, y_0)$.

1. Если $AC - B^2 > 0$, то данная функция в точке (x_0, y_0) имеет экстремум, причем максимум, если $A < 0$ ($C < 0$), и минимум, если $A > 0$ ($C > 0$).
2. Если $AC - B^2 < 0$, то в рассматриваемой точке (x_0, y_0) экстремума нет.

3. Если $AC-B^2=0$, то в точке (x_0, y_0) функция $z=f(x,y)$ может иметь экстремум, а может и не иметь.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x,y)=4x^2y+24xy+y^2+32y-6.$$

Решение. Область определения функции $D(f)$ – вся плоскость xOy; $f(x,y)$ – дифференцируема в каждой точке $M(x,y)\in D(f)$.

1. Найдем стационарные точки.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=8xy+24y=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4x^2+24x+2y+32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+3)=0, \\ 2x^2+12x+y+16=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем три стационарные точки: $M_1(-4,0)$, $M_2(-2,0)$, $M_3(-3,2)$.

2. Исследуем эти точки на экстремум с помощью теоремы 2. Сначала определяем отдельно

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=8x+24,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2.$$

Сейчас для каждой точки вычислим соответствующие (смотри теорему 2) A, B, C и определим знаки величин $\Delta=AC-B^2$ и A.

а) $M_1(-4,0)$: $A_1=0$, $B_1=-32+24=-8$, $C_1=2$, $A_1C_1-B_1^2=-64<0$, т.е. $M_1(-4,0)$ не является точкой экстремума.

б) $M_2(-2,0)$: $A_2=0$, $B_2=-16+24=8$, $C_2=2$, $A_2C_2-B_2^2<0$, т.е. $M_2(-2,0)$ не является точкой экстремума.

в) $M_3(-3,2)$: $A_3=16$, $B_3=0$, $C_3=2$, $A_3C_3-B_3^2=32>0$. При этом $A>0$. Вывод: $M_3(-3,2)$ – точка минимума функции $f(x,y)$, $f_{min}=f(-3,2)=-10$.

Замечание. В данном параграфе мы ввели понятие экстремума для функции двух переменных, а также сформулировали необходимое условие экстремума для такой функции. Аналогичное можно сделать для функции любого числа переменных.

§ 9. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных

Пусть в замкнутой ограниченной области E задана непрерывная функция $z=f(x,y)$. Будем предполагать, что данная функция имеет обе частные производные в каждой точке области E.

По второй теореме Вейерштрасса данная функцияв области E имеет наибольшее и наименьшее значения. Эти значения могут достигаться данной функцией либо внутри области E, либо на ее границе. Если наибольшее (наименьшее) значение достигается данной функцией во внутренней точке области E, то эта точка, очевидно, является точкой максимума (минимума) данной функции и поэтому находится среди подозрительных на экстремум стационарных точек. Отсюда следует простое правило для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $z = f(x, y)$, непрерывной в замкнутой ограниченной области *E*.

Находим стационарные точки данной функции и вычисляем значения данной функции в этих точках. Эти значения сравниваем со значениями данной функции на границе области *E*. Среди них выбираем наибольшее (наименьшее). Это и будет наибольшее (наименьшее) значение данной функции в области *E*.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$ (рис. 90)

Решение.

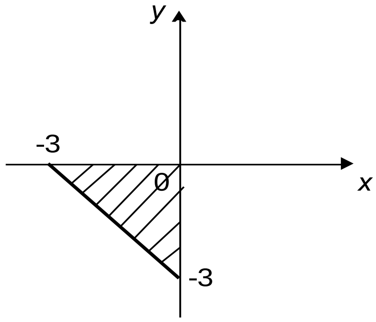


Рис. 90

Указанная область есть треугольник. Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} z_x' = 2x - y + 1 = 0, \\ z_y' = 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует. что $x = -1$, $y = -1$. Получили точку $M(-1,1)$. В точке *M* значение функции $z_M = -1$.

Исследуем функцию на границе области. При $x = 0$ имеем $z = y^2 + y$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений этой функции одного аргумента на отрезке $-3 \le y \le 0$. Проведя исследование, найдем, что $(z_{найб.})_{x=0} = 6$ в точке $(-3, 0)$, $(z_{найм.})_{x=0} = -\dfrac{1}{4}$ в точке $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$.

При $y = 0$ имеем $z = x^2 + x$. Аналогично находим, что $(z_{найб.})_{y=0} = 6$ в точке $(-3, 0)$, $(z_{найм.})_{y=0} = -\dfrac{1}{4}$ в точке $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

При $x + y = -3$ или $y = -3 - x$ будем иметь $z = 3x^2 + 9x + 6$. Аналогичным образом найдем, что $(z_{найм.})_{x+y=-3} = -\dfrac{3}{4}$ в точке $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(z_{найб.})_{x+y=-3} = 6$ совпадает с $(z_{найб.})_{x=0}$ и $(z_{найб.})_{y=0}$.

Сопоставляя все полученные значения функции z, заключаем, что $z_{найб.} = 6$ в точках $(0, -3)$ и $(-3, 0)$, $z_{найм.} = -1$ в стационарной точке *M*.

§ 10. Условный экстремум

В простейшем случае *условным экстремумом* функции $f(x,y)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что ее аргументы связаны уравнением $\varphi(x,y)=0$ (*уравнением связи*).

Чтобы найти условный экстремум функции $f(x,y)$ при наличии соотношения $\varphi(x,y)=0$, составляют так называемую *функцию Лагранжа*

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y),$$

где $\lambda-$неопределенный постоянный множитель, и ищут обычный экстремум этой вспомогательной функции. Необходимые условия экстремума сводятся к системе трех уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \tag{1}$$

с тремя неизвестными x,y,λ, из которой можно, вообще говоря, определить эти неизвестные.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$d^2F(x,y)=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dy^2$$

для испытуемой системы значений x,y,λ, полученной из (1) при условии, что dx и dy связаны уравнением $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0$ $(dx^2+dy^2\neq0)$.

А именно, функция $f(x,y)$ имеет условный максимум, если $d^2F<0$, и условный минимум, если $d^2F>0$.

В частности, если дискриминант $\Delta=AC-B^2$ для функции $F(x,y)$ в стационарной точке положителен, то в этой точке имеется условный максимум функции $f(x,y)$, если $A<0$ (или $C<0$), и условный минимум, если $A>0$ (или $C>0$).

Аналогично находится условный экстремум функции трех или большего числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределенных множителей, сколько имеется уравнений связи.

Пример 1. Найти экстремумы функции $z=6-4x-3y$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа

$$F(x,y)=6-4x-3y+\lambda(x^2+y^2-1).$$

Имеем $\frac{\partial F}{\partial x}=-4+2\lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-3+2\lambda y$. Необходимые условия дают систему

$$\begin{cases}-4+2\lambda x=0,\\ -3+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$$

решая которую, найдем: $\lambda_1=\frac{5}{2}$, $x_1=\frac{4}{5}$, $y_1=\frac{3}{5}$ и $\lambda_1=-\frac{5}{2}$, $x_1=-\frac{4}{5}$, $y_1=-\frac{3}{5}$.

Так как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda,$$

то

$$d^2F=2\lambda(dx^2+dy^2).$$

Если $\lambda_1=\frac{5}{2}$, $x_1=\frac{4}{5}$, $y_1=\frac{3}{5}$, то $d^2F>0$, и, следовательно, в этой точке функция имеет условный минимум. Если $\lambda_1=-\frac{5}{2}$, $x_1=-\frac{4}{5}$, $y_1=-\frac{3}{5}$, то $d^2F<0$, и, следовательно, в этой точке функция имеет условный максимум.

Таким образом,

$$z_{\max}=6+\frac{16}{5}+\frac{9}{5}=11,\ z_{\min}=6-\frac{16}{5}-\frac{9}{5}=1.$$

Прыклад 2. Найти прямоугольный параллелепипед наибольшего объема, если его полная поаерхность имеет площадь $2a$.

Рашэнне. Пусть длины сторон параллелепипеда x,y и z. Его объем $V=xyz$, а площадь поверхности $S=2(xy+xz+yz)$. Таким образом, надо найти наибольшее значение функции $V=xyz$ при условии

$xy+xz+yz-a=0$.

Строим вспомогательную функцию

$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(xy+xz+yz-a)$$

и приравниваем к нулю все ее частные производные первого порядка:

$$yz+\lambda(y+z)=0, \qquad (1')$$

$$xz+\lambda(x+z)=0, \qquad (2')$$

$$xy+\lambda(x+y)=0, \qquad (3')$$

$$xy+xz+yz-a=0. \qquad (4')$$

Учитывая, что x,y и z по смыслу задачи положительные, и из равенств ($1'$) и ($2'$) получаем:

$$\frac{yz}{y+z}=\frac{xz}{x+z},$$

т.е. $yz(x+z)=xz(y+z)$, $z^2(x-y)=0$, $x=y$.

Аналогично из равенств ($2'$) и ($3'$) следует, что $y=z$.

Подставляя в равенство ($4'$) $x=y=z$, находим:

$$3x^2=a,\ x=\sqrt{\frac{a}{3}}=y=z.$$

Точка $\left(x_0=\sqrt{\frac{a}{3}}, y_0=\sqrt{\frac{a}{3}}, z_0=\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ является стационарной точкой функции V. Так как сформулированная задача имеет конкретное решение, а стационарная точка одна, то в этой точке будет экстремум.

Таким образом, искомый параллелепипед – куб со стороной $\sqrt{\frac{a}{3}}$, его объем $V=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$.

§ 11. Неявные функции

I. Пусть дана функция двух переменных $F(x, y)$. Составим уравнение

$$F(x, y)=0. \tag{1}$$

Предполагаем, что для каждого числа *x*, принадлежащего некоторому множеству *X*, существует одно или несколько чисел *y*, удовлетворяющих вместе с *x* уравнению (1). Тогда каждому $x\in X$ можно поставить в соответствие одно из таких чисел *y*. Получим функцию $y=f(x)$, которая определена на множестве *X* и удовлетворяет на этом множестве уравнению (1):

$$F(x, f(x))=0 \qquad \forall x\in X.$$

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется неявной функцией, определяемой уравнением (1) на множестве *X*, если на этом множестве она удовлетворяет уравнению (1), т.е. если $F(x, f(x))=0\ \forall x\in X$.

Говорят также, что функция $y=f(x)$ неявно определена уравнением (1) на множестве *X* или что уравнение (1) неявно определяет функцию $y=f(x)$ на множестве *X*.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $x^3-3x+y=0$. Это уравнение неявно определяет функцию $y=-x^3+3x$ на промежутке $(-\infty,+\infty)$, поскольку

$$x^3-3x+\left(-x^3+3x\right)=0 \qquad \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение $x^2+y^2-1=0$. Это уравнение окружности. Оно на отрезке $[-1,1]$ неявно определяет функцию $y=\sqrt{1-x^2}$, а также функцию $y=-\sqrt{1-x^2}$. Графиками этих функций являются соответственно верхняя и нижняя полуокружности (рис. 91).

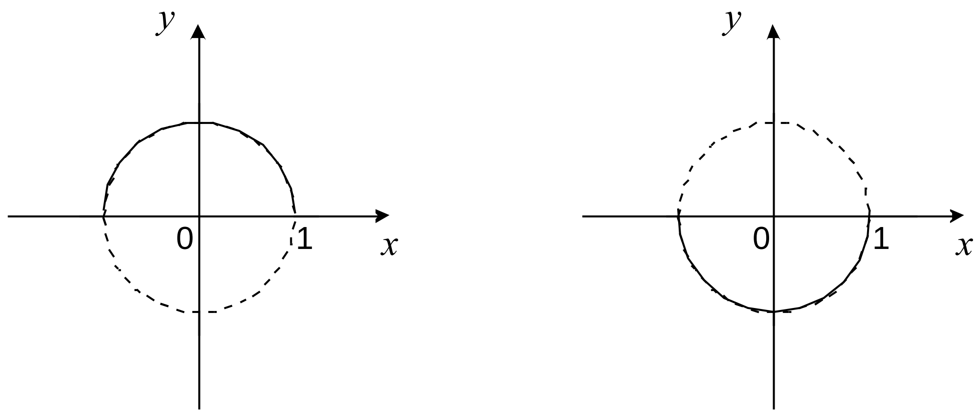


Рис. 91

Данное уравнение на отрезке $[-1,1]$ неявно определяет также функцию $y=f(x)$, график которой имеет следующий вид (рис. 92).

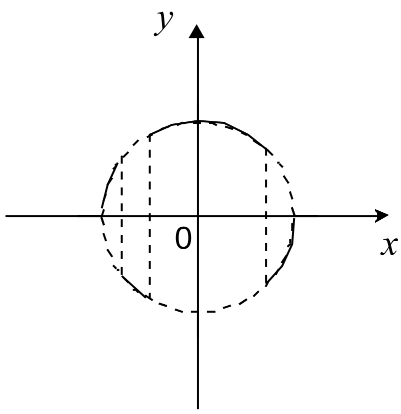


Рис. 92

Ясно, что на отрезке $[-1,1]$ уравнение $x^2+y^2-1=0$ неявно определяет бесконечное множество функций.

Пример 3. Рассмотрим уравнение $x^2+y^2+1=0$. Это уравнение не определяет ни одной неявной функции.

Возникает вопрос: при каких условиях уравнение (1) определяет неявную функцию?

Теорема 1. Пусть

1) функция $F(x,y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой окрестности точки (x_0,y_0);

2) $F(x_0,y_0)=0$;

3) $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности Δ точки x_0 существует единственная функция $y=f(x)$, обладающая следующими свойствами:

1) в окрестности Δ функция $y=f(x)$ удовлетворяет уравнению (1);

2) $f(x_0)=y_0$;

3) функция $y=f(x)$ непрерывна в окрестности Δ;

4) в окрестности Δ функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$.

Таким образом, при выполнении условия теоремы 1 уравнение (1) в некоторой окрестности Δ неявно определяет единственную функцию $y = f(x)$ (с хорошими свойствами).

II. Займемся нахождением производной неявной функции. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда уравнение (1) в окрестности Δ определяет неявную функцию $y = f(x)$. Эта функция по теореме 1 в окрестности Δ имеет производную y'. Найдем ее.

Функция $y = f(x)$ в окрестности Δ удовлетворяет уравнению (1), т.е. $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in \Delta.$ Из этого тождества следует

$$\frac{dF(x, f(x))}{dx} = 0 \qquad \forall x \in \Delta. \tag{3}$$

Функцию $F(x, f(x))$ можно рассматривать как сложную функцию $F(x, y)$, где $y = f(x)$. Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции. Получим

$$\frac{dF(x, f(x))}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Поэтому равенство (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда следует

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{4}$$

Пример 4. Дано уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Вычислим производную неявной функции, определяемой этим уравнением. Имеем

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

По формуле (4) $y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$.

III. Рассмотрим плоскую кривую, заданную уравнением (1). На этой кривой возьмем точку $M_0(x_0, y_0)$. Будем предполагать, что в некоторой окрестности этой точки выполнены все условия теоремы 1. Тогда уравнение (1) в некоторой окрестности Δ точки x_0 определяет неявную функцию $y = f(x)$. Графиком этой функции является данная кривая.

Составим уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$. Как известно, уравнение касательной имеет следующий вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Так как по формуле (4) $f'(x_0)=-\dfrac{F_x'(x_0,y_0)}{F_y'(x_0,y_0)}$, то уравнение касательной примет вид:

$$y-y_0=-\frac{F_x'(x_0,y_0)}{F_y'(x_0,y_0)}(x-x_0),$$

т.е.

$$F_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

Уравнение нормали имеет следующий вид: $y-y_0=\dfrac{F_y'(x_0,y_0)}{F_x'(x_0,y_0)}(x-x_0),$

т.е.

$$F_y'(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x'(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

IV. Аналогично уравнению 1 можно ввести понятие неявной функции $z=f(x,y)$, определяемой уравнением

$$F(x,y,z)=0. \qquad (6)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть

1) функция $F(x,y,z)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой окрестности точки (x_0,y_0,z_0);

2) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

3) $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности Δ точки (x_0,y_0) существует и притом единственная функция $z=f(x,y)$, обладающая следующими свойствами:

1) в окрестности Δ функция $z=f(x,y)$ удовлетворяет уравнению (6);

2) $z_0=f(x_0,y_0)$;

3) функция $z=f(x,y)$ непрерывна в окресности Δ;

4) в окрестности Δ функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Нетрудно показать, что частные производные функции $z=f(x,y)$ находятся по формулам: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$.

V. Рассмотрим заданную уравнением (6) поверхность. На этой поверхности возьмем точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Будем предполагать, что в некоторой окрестности этой точки выполнены все условия теоремы 2. Тогда в некоторой окрестности Δ точки (x_0,y_0) уравнение (6) определяет неявную функцию $z=f(x,y)$, графиком этой функции является данная поверхность.

Составим уравнение касательной плоскости и нормали к данной поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

Уравнение касательной плоскости, как известно ,имеет вид:

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Отсюда, так как

$$f_x'(x_0, y_0) = -\frac{F_x'(x_0, y_0, z_0)}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}, \qquad f_y'(x_0, y_0) = -\frac{F_y'(x_0, y_0, z_0)}{F_z'(x_0, y_0, z_0)},$$

получаем

$$F_x'(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y'(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z'(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Уравнение нормали имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{F_x'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y'(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z'(x_0, y_0, z_0)}.$$

§ 12. Производная по направлению. Градиент

Рассмотрим функцию $z = f(M)$, определенную в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, и произвольный единичный вектор $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ (рис. 93).

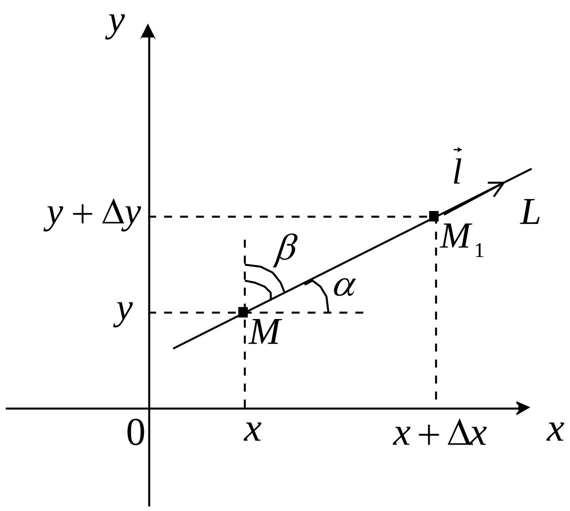


Рис. 93

Для характеристики скорости изменения функции в точке $M(x, y)$ в направлении вектора $\vec{l}$ введем понятие производной по направлению. Для этого проведем через точку M прямую L так, чтобы одно из направлений на ней совпадало с направлением вектора $\vec{l}$, и возьмем на направленной прямой точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Обозначим величину отрезка MM_1 через Δl, т.е. $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, если точка M_1 располагается так, как на рисунке 1, и $\Delta l = -\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, если точка M_1 располагается по другую сторону от точки M. Функция $f(M)$ получит при этом прирост

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение 1. Предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0\ (M_1 \to M)$, если он существует, называется производной функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ по направлению вектора $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$, т.е.

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial l}.$$

Полагаем, что функция $z = f(M)$ дифференцируема в точке M. Тогда ее прирост в этой точке вдоль прямой L можно записать в виде

$$\Delta z = f_x'(x, y)\Delta x + f_y'(x, y)\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta_1(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где α_1, β_1 – бесконечно малые функции при $\Delta l \to 0$. Разделив обе части равенства на Δl и учитывая, что $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \sin\alpha = \Delta l \cos\beta$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = f_x'(x, y)\cos\alpha + f_y'(x, y)\cos\beta + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\cos\alpha + \beta_1(\Delta x, \Delta y)\cos\beta.$$

Перейдя к пределу в этом равенстве при $\Delta l \to 0$, получим формулу для производной по направлению

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \qquad (1)$$

Заметим, что частные производные по x и y это частные случаи производной по направлению. В частности, $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}$ при $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial y}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = 0$.

Пример 1. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2 x$ в точке $M(1, 2)$ по направлению вектора $\overrightarrow{MM_1}$, где M_1 – точка с координатами $(3, 0)$.

Решение. Найдем единичный вектор $\vec{l}$, имеющий заданное направление:

$$\overrightarrow{MM_1} = \{2; -2\} = 2\vec{i} - 2\vec{j}; \qquad \left|\overrightarrow{MM_1}\right| = 2\sqrt{2};$$

$$\vec{l} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\left|\overrightarrow{MM_1}\right|} = \frac{2\vec{i} - 2\vec{j}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

откуда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Вычислим частные производные функции в точке $M(1, 2)$: $f_x'(x, y) = 2x + y^2$, $f_y'(x, y) = 2xy$, откуда $f_x'(1, 2) = 6$, $f_y'(1, 2) = 4$. По формуле (1) получим

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 6\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Определение 2. Градиентом функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор, координаты которого соответственно равны частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятым в точке $M(x, y)$. Обозначение:

$$\mathrm{grad}z = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right\}.$$

Используя понятие градиента функции и учитывая, что вектор $\vec{l}$ имеет координаты $\cos\alpha$, $\cos\beta$, запишем формулу (1) в виде скалярного произведения векторов $\mathrm{grad}z$ и $\vec{l}$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \mathrm{grad}z \cdot \vec{l}. \tag{2}$$

С другой стороны, по определению скалярного произведения имеем

$$\mathrm{grad}z \cdot \vec{l} = |\mathrm{grad}z| \cdot |\vec{l}| \cos\varphi, \tag{3}$$

где $|\mathrm{grad}z|$ – длина вектора $\mathrm{grad}z$; φ – угол между векторами $\vec{l}$ и $\mathrm{grad}z$. Сравнивая формулы (2) и (3) и учитывая, что $|\vec{l}| = 1$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\mathrm{grad}z| \cos\varphi.$$

Из последнего равенства следует, что производная функции по направлению имеет наибольшую величину при $\cos\varphi = 1$ $(\varphi = 0)$, т.е. когда направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением $\mathrm{grad}z$. При этом

$$\frac{\partial z}{\partial l} = |\mathrm{grad}z|.$$

Таким образом, градиент функции $z = f(M)$ в точке $M(x, y)$ характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания функции в данной точке.

Замечание. Аналогично определяется производная по направлению для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, выводится формула $\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$, вводится понятие градиента $\mathrm{grad}u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$ и исследуются его свойства.

РАЗДЕЛ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Двойной интеграл

1. Определение двойного интеграла

Пусть в замкнутой квадрируемой области (P) задана функция $z = f(x, y)$. Область (P) разобъем на n частичных квадрируемых областей (P_1), (P_2), …, (P_n) (рис. 94), которые могут иметь общими лишь граничные точки.

Совокупность всех этих частичных областей назовем разбиением T

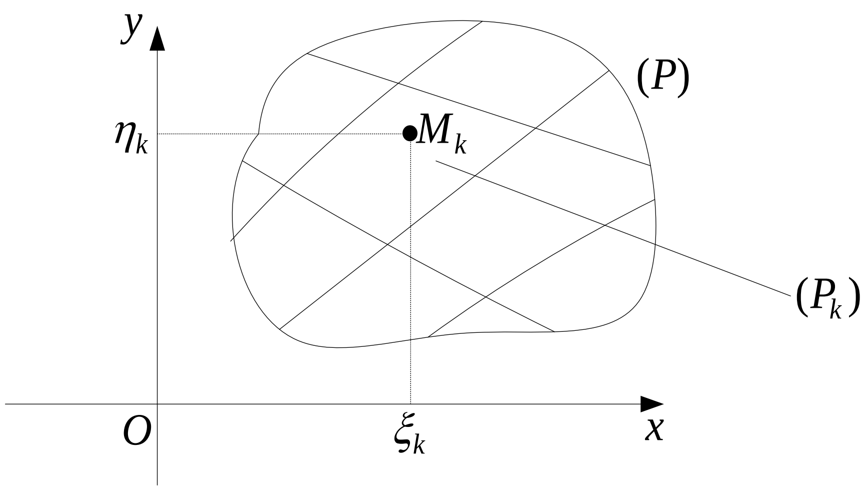


Рис. 94

области (P). Площади частичных областей обозначим соответственно через P_1, P_2, … P_n.

Определение 1. Диаметром области (P_k) называется верхняя грань расстояний между всевозможными парами точек этой области.

Наибольший из диаметров частичных областей обозначим через λ.

В каждой замкнутой частичной области (P_k) возьмем произвольную точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ и вычислим значение функции в этой точке $f(\xi_k, \eta_k)$.

Далее составим следующую сумму

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) P_k . \tag{1}$$

Сумма (1) называется интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ в области (P).

Определение 2. Если существует предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, то функция $z = f(x, y)$ называется интегрируемой в области (P), а этот предел I называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области (P) и обозначается $I = \iint\limits_{(P)} f(x, y) dxdy$.

Таким образом, по определению имеем:

$$I=\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sigma .$$

2. Существование двойного интеграл

Теорема 1. Если функция $z=f(x,y)$ непрерывна в замкнутой квадрируемой области (P), то она интегрируема в этой области.

3. Основные свойства двойного интеграла

1°. Если функции $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ интегрируемы в области (P), то в этой области интегрируемыми будут и функции $f(x,y)\pm\varphi(x,y)$, причем имеет место равенство

$$\iint\limits_{(P)}[f(x,y)\pm\varphi(x,y)]dxdy=\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy\pm\iint\limits_{(P)}\varphi(x,y)dxdy .$$

2°. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области (P), то интегрируемой в этой области будет и функция $cf(x,y)$ $(c-const)$, причем имеет место равенство

$$\iint\limits_{(P)} cf(x,y)dxdy=c\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy .$$

3°. Если область (P) является объединением областей (P'), (P''), не имеющих общих внутренних точек, в каждой из которых функция $f(x,y)$ интегрируема, то в области (P) функция также интегрируема и

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(P')} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{(P'')} f(x,y)dxdy .$$

4°. Пусть функции $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ интегрируемы в области (P), и в этой области имеет место неравенство $f(x,y)\le\varphi(x,y)$. Тогда

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy\le\iint\limits_{(P)}\varphi(x,y)dxdy .$$

4. Вычисление площади области при помощи двойного интеграла

$$P=\iint\limits_{(P)} dxdy .$$

Действительно, полагая $f(x,y)=1$ в области (P), для любого разбиения области (P) на части (P_1), (P_2), …, (P_n), получим:

$$\iint\limits_{(P)} dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}P_k=\lim_{\lambda\to 0}P=P .$$

§ 2. Вычисление объема цилиндрического тела

Пусть в замкнутой квадрируемой области (P) задана непрерывная неотрицательная функция $z = f(x, y)$.

Рассмотрим тело (V), ограниченное сверху графиком этой функции, снизу – областью (P), с боку – цилиндрической поверхностью, направляющей которой является граница области (P), а образующие которой параллельны оси Oz. Тело такого вида называется цилиндрическим телом (рис. 95).

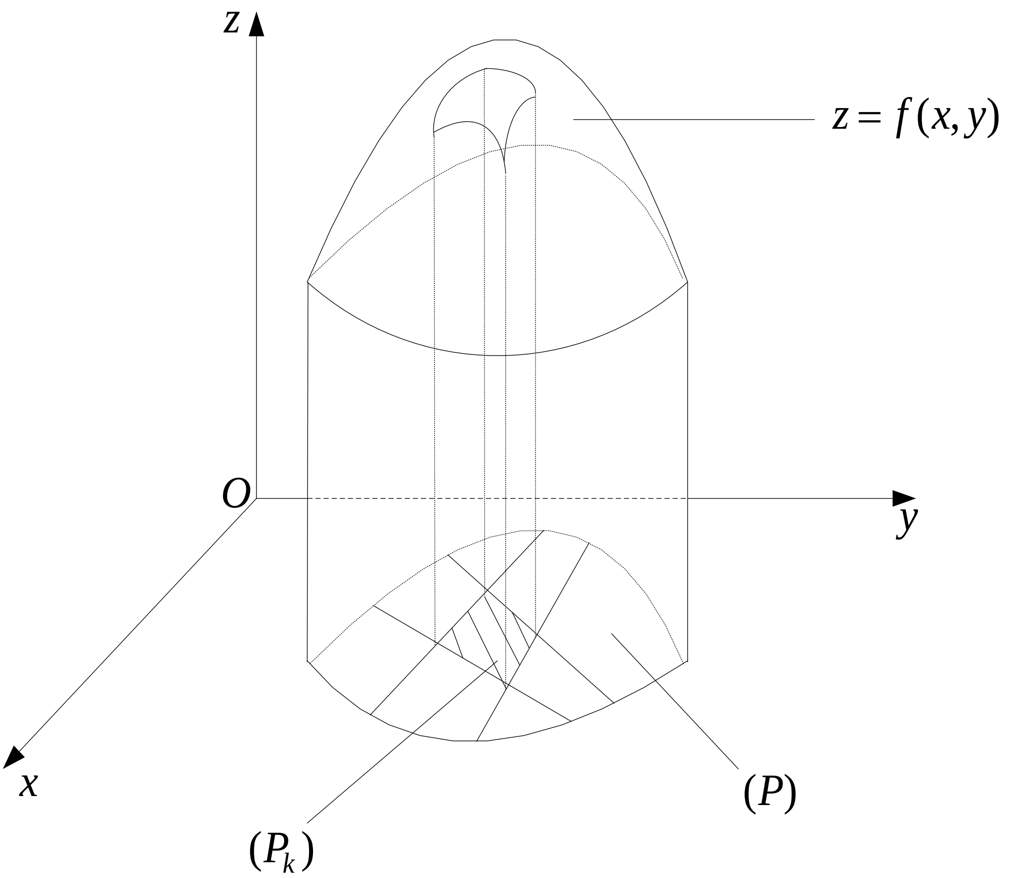


Рис. 95

Теорема. Цилиндрическое тело (V) является кубируемым и его объем V вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x, y)dxdy .$$

§ 3. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием

Теорема 1. Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области (P), ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, которые непрерывны на отрезке $[a; b]$ и удовлетворяют на этом отрезке неравенству $y_1(x) \le y_2(x)$ (рис. 96).

Тогда

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx. \tag{1}$$

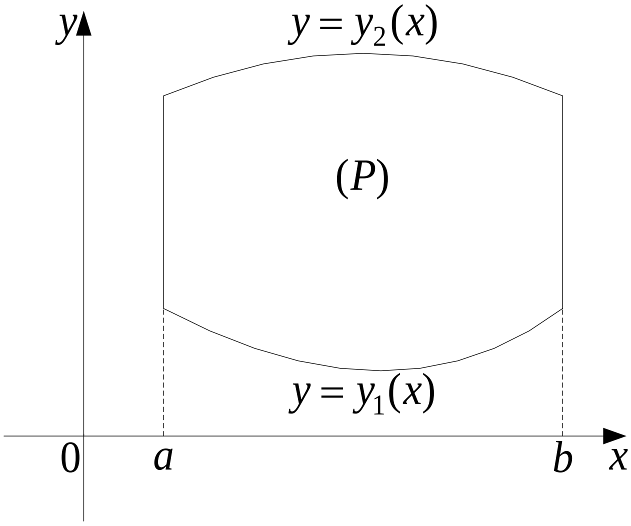


Рис. 96

Замечание 1. При вычислении интеграла $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ x считается фиксированным (постоянным). Выражение в правой части равенства (1) называют повторным интегралом и обозначают также так: $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

Учитывая это, формулу (1) можно записать в виде

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{1$'$}$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(P)} e^{y/x}dxdy$, если область (P) ограничена линиями $y=0$, $y=x$, $x=1$ (рис. 97).

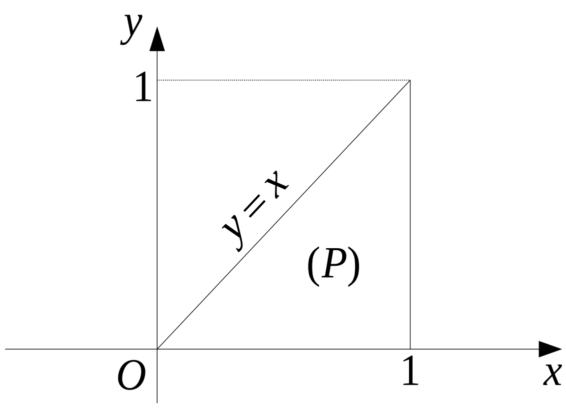


Рис. 97

Решение.

$$\iint\limits_{(P)} e^{y/x}dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x e^{y/x}dy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^x e^{y/x}d\left(\frac{y}{x}\right)=\int\limits_0^1 xe^{y/x}\Big|_0^x dx=$$

$$=\int\limits_0^1 x(e-1)dx=(e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}.$$

Теорема 2. Пусть функция $z=f(x,y)$ непрерывна в области (P), ограниченной прямыми $y=c$, $y=d$ и графиками функций $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$, которые непрерывны на отрезке $[c;d]$ и удовлетворяют на этом отрезке неравенству $x_1(y)\le x_2(y)$ (рис. 98).

Тогда

$$\iint\limits_{(P)} f(x;y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (2)$$

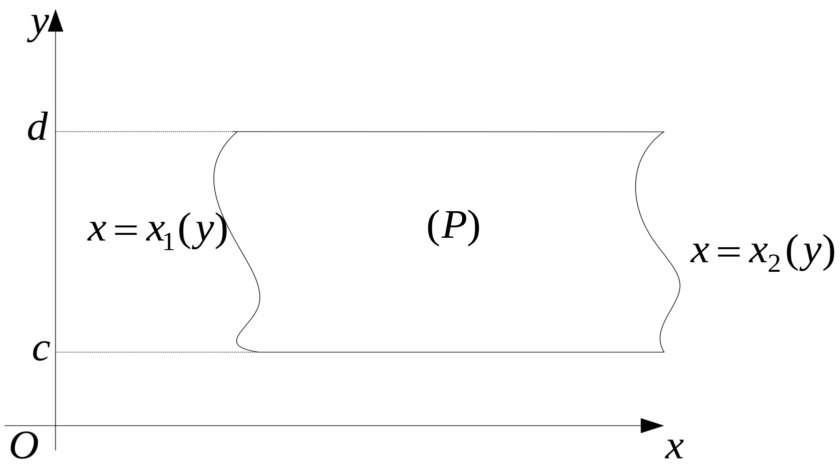


Рис. 98

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(P)} xdxdy$, если область (P) ограничена линиями $y=-x$, $y=1$, $y=x^2$ (рис. 99).

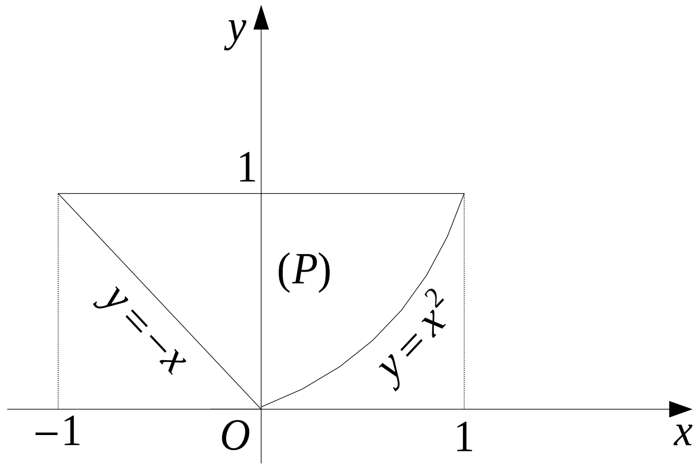


Рис. 99

Решение. Используя формулу (2), получим:

$$\iint\limits_{(P)} xdxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{y}} xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y - y^2\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Замечание 2. В случае области интегрирования более сложного вида мы разбиваем ее на такие части, по которым умеем вычислять двойной интеграл, а затем пользуемся свойством 3° (аддитивности) двойного интеграла.

§ 4. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах

Теорема. Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$, где функция $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой квадрируемой области (P) плоскости xOy.

Пусть функции

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v) \tag{1}$$

непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой замкнутой квадрируемой области (P') плоскости uO_1v и взаимно однозначно отображают эту область на область (P).

Тогда имеет место следующая формула замены переменных в двойном интеграле:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P')} f(x(u,v), y(u,v))|I(u,v)|dudv, \tag{2}$$

где

$$I(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Функциональный определитель (3) называется определителем Якоби или якобианом отображения (1).

Наиболее часто встречающимся случаем замены переменных в двойном интеграле является переход от прямоугольных декартовых координат x, y к полярным координатам ρ, φ. Этот переход совершается по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Вычислим

$$I(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Воспользовавшись формулой (2) получим:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(P')} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi. \tag{4}$$

Пусть область (P) в полярной системе координат (полярная ось которой совпадает с осью Ox, а полюс с точкой O) ограничена двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = b$ ($\alpha < \beta$) и графиками функций $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, которые непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяют на этом отрезке неравенству: $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ (рис. 100).

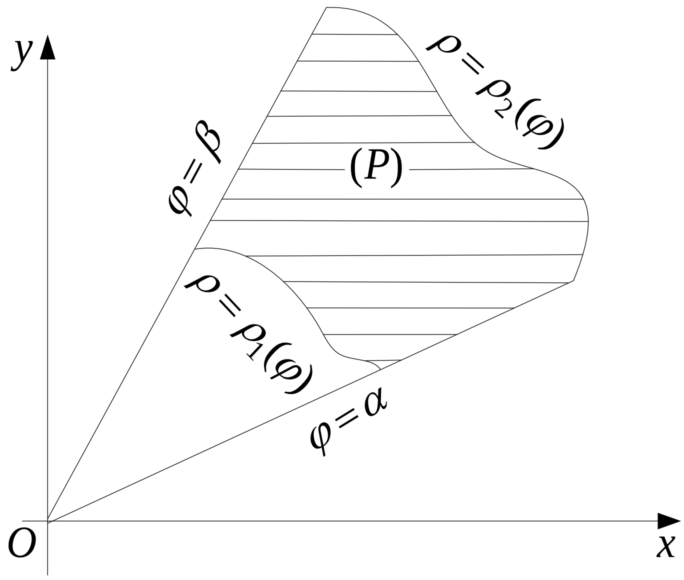


Рис. 100

Тогда имеет место следующая формула

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y) dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho\,. \qquad (5)$$

Этой формулой удобно пользоваться на практике.

Пример. Вычислить $\iint\limits_{(P)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, где областью интегрирования является круг с радиусом a и центром в точке $(0;0)$ (рис. 101).

Решение. С целью упрощения вычислений перейдем к полярным координатам. За полюс примем центр круга (начало системы координат).

$$\iint\limits_{(P)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2}\, \rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}\left(a^2 - \rho^2\right)^{3/2} \Big|_0^a \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3\,.$$

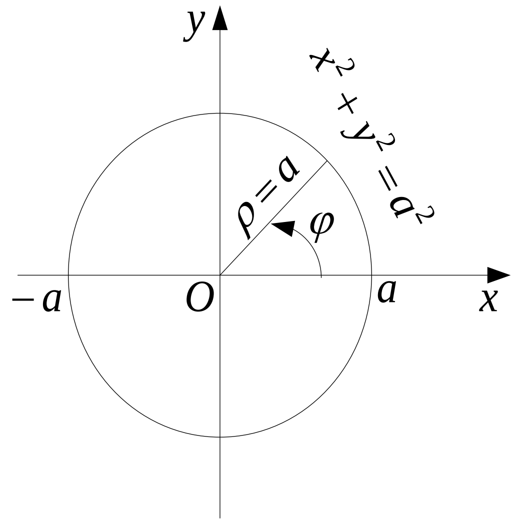


Рис. 101

§ 5. Площадь поверхности

С помощью двойных интегралов можно вычислять площади не только плоских фигур. но и кривых поверхностей.

Пусть (S) – поверхность $z=f(x,y)$, а замкнутая область (P) – ее проекция на координатную плоскость xOy (рис. 102).

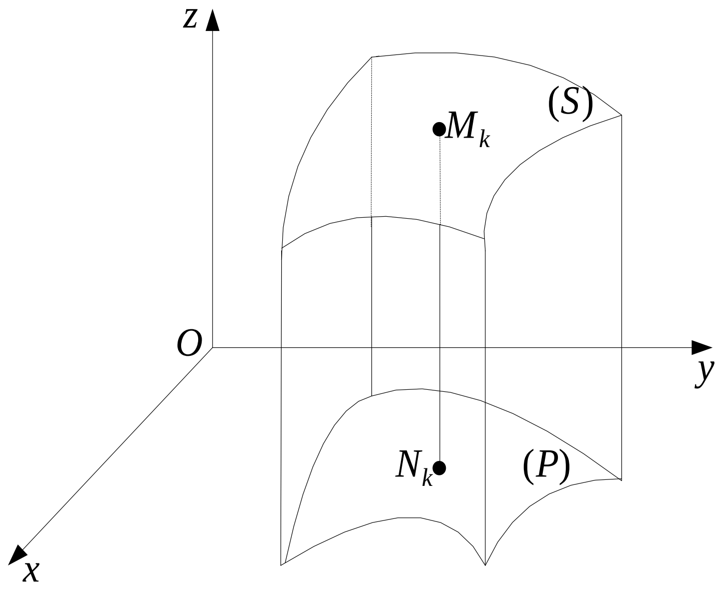


Рис. 102

Будем предполагать, что в области (P) функция $z=f(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка.

Площадь S поверхности (S) вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_{(P)}\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dxdy\,.$$

§ 6. Нахождение массы и центра тяжести материальной пластинки

I. Пусть дана материальная пластинка, т.е. замкнутая квадрируемая область (P), вдоль которой распространена масса с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$. Будем предполагать, что функция $\rho(x, y)$ непрерывна в области (P).

Масса материальной пластинки находится по формуле

$$m = \iint\limits_{(P)} \rho(x, y)dxdy .$$

II. Пусть дана материальная пластинка, т.е. замкнутая квадрируемая область (P), вдоль которой распространена масса с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$. Будем предполагать, что функция $\rho(x, y)$ непрерывна в области (P).

Тогда координаты центра тяжести материальной пластинки определяются формулами:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_{(P)} x\rho(x, y)dxdy}{\iint\limits_{(P)} \rho(x, y)dxdy}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_{(P)} y\rho(x, y)dxdy}{\iint\limits_{(P)} \rho(x, y)dxdy},$$

где $M_x = \iint\limits_{(P)} y\rho(x, y)dxdy$, $M_y = \iint\limits_{(P)} x\rho(x, y)dxdy$ – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy.

РАЗДЕЛ 6. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Первоначальные понятия

В интегральном исчислении изучается задача нахождения функции по ее производной. Эту задачу можно сформулировать следующим образом: найти функцию y, удовлетворяющую уравнению

$$y' = f(x),$$

где $f(x)$ – заданная функция.

Можно сформулировать более общую задачу: найти функцию y, удовлетворяющую уравнению

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Таким образом, обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные.

Заметим, что в обыкновенном дифференциальном уравнении неизвестная функция является функцией одной переменной. Однако встречаются такие уравнения, которые связывают неизвестную функцию нескольких переменных, частные производные этой функции и независимые переменные. Такие уравнения называются *дифференциальными уравнениями в частных производных.* Далее мы будем изучать только обыкновенные дифференциальные уравнения, называя их просто дифференциальными уравнениями.

Определение 1. Наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в дифференциальное уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Определение 2. Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, которая удовлетворяет данному уравнению, т.е. при подстановке которой в данное уравнение получаем тождество.

Отметим, что решение дифференциального уравнения может быть задано и в неявной форме.

Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, неявно определяющее решение дифференциального уравнения, называется *интегралом дифференциального уравнения.*

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой дифференциального уравнения.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + y = 0. \qquad (2)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка.

Проверим, является ли функция $y = \sin x$ решением дифференциального уравнения (2). Имеем, $y = \sin x$, $y'' = -\sin x$. Найденные выражения подставим в дифференциальное уравнение (2). В результате получим: $-\sin x + \sin x \equiv 0$.

Заметим, что уравнение $y - \sin x = 0$ является интегралом дифференциального уравнения (2). Данное уравнение имеет еще одно решение $y = \cos x$, что можно непосредственно проверить. Более того, данное уравнение (2) имеет бесконечное множество решение $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Теория дифференциальных уравнений занимается нахождением решений дифференциальных уравнений и изучением свойств этих решений. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

К составлению дифференциальных уравнений приводят многочисленные задачи математики и физики.

Задача 1. На плоскости xOy найти кривую, которая в каждой точке имеет касательную, угловой коэффициент которой равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y = y(x)$ – уравнение искомой кривой. Из дифференциального исчисления известно, что угловой коэффициент касательной к этой кривой в точке $M(x, y(x))$ равен $y'(x)$.

По условию задачи он равен $2x$. Получаем дифференциальное уравнение

$$y' = 2x. \tag{3}$$

Из интегрального исчисления известно, что это уравнение имеет целое семейство решений

$$y = x^2 + C, \tag{4}$$

где C – произвольная постоянная. Причем все решения исчерпываются этим семейством. Графиками этих решений, т.е. интегральными кривыми будут параболы.

Выделим теперь из найденного семейства парабол ту, которая проходит через точку $M(1;2)$. Для этого необходимо найти соответствующее значение константы C. Из (4), если $x = 1, y = 2$, получаем $C = 1$. Таким образом, $y = x^2 + 1$ – уравнение искомой параболы.

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Будем предполагать, что его можно решить относительно y', т.е. можно записать в виде

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Частным случаем такого уравнения является уравнение $y' = f(x)$.

Иногда для дифференциального уравнения (1) удается найти семейство всех решений (за исключением, быть может, некоторых), т.е. удается найти такую функцию $y = \varphi(x, C)$, которая обладает следующими свойствами:

1) при каждом значении C (из некоторого множества) она будет решением

уравнения (1);

2) при надлежащем подборе C она обращается в любое решение дифференциального уравнения (1), за исключеним, быть может, некоторых.

Такая функция $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решение дифференциального уравнения* (1).

Те решения. которые получаются из общего при конкретных значениях C, называются *частными решениями данного дифференциального уравнения.*

Например, $y = x^2 + C$ (C – произвольная постоянная) – общее решение дифференциального уравнения $y' = 2x$; $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 3$ – частные решения этого уравнения.

Иногда удается найти такое уравнение

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{2}$$

которое неявно определяет все решения дифференциального уравнения (1) (за исключением, быть может, некоторых), т.е. обладает следующими свойствами:

1) каждое решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1) удовлетворяет уравнению (2) при некотором значении C;

2) каждая функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению (2) при каком-либо C, является решением дифференциального уравнения (1).

Такое уравнение (2) называется *общим интегралом дифференциального уравнения* (1).

Так, например, $x^2 - y + C = 0$ – общий интеграл дифференциального уравнения $y' = 2x$.

Часто возникает следующая задача: найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее следующему начальному условию:

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

т.е.

$$y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

Геометрически это означает, что надо найти интегральную кривую, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$.

Такая задача называется *задачей Коши.* Числа x_0, y_0 называются начальными данными.

§ 3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Замечание 1. В теории дифференциальных уравнений под символом $\int f(x)dx$ понимают не все семейство первообразных для функции $f(x)$, а одну какую-нибудь первообразную.

Замечание 2. Условимся говорить, что дифференциальное уравнение проинтегрировано в квадратурах, если его общее решение или общий интеграл найдены в виде, который может содержать невзятые интегралы от известной функции.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = \frac{\sin x}{x}$. Общее решение этого уравнения имеет следующий вид: $y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C$.

Данное дифференциальное уравнение проинтегрировано в квадратурах.

Определение 1. Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \tag{1}$$

где $P(x)$, $Q(y)$ – непрерывные при рассматриваемых значениях x и y функции.

Вывод. Общий интеграл дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C\ , \tag{2}$$

где C – произвольная постоянная.

Пример 2. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $(2x-2)dx + 2ydy = 0$, проходящую через начало координат.

Решение. Переменные разделены, так как выражение при dx является функцией только x, а коэффициент при dy является только функцией y.

Используем формулу (2), получим $\int (2x-2)dx + \int 2ydy = C$

или

$$x^2 - 2x + y^2 = C. \tag{3}$$

Полагая $x = y = 0$, находим $C = 0$. Подставляя это значение C в (3), будем иметь $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

Эта окружность и есть искомая интегральная кривая.

Определение 2. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0, \tag{4}$$

где $P_1(x)$, $Q_1(y)$, $P_2(x)$, $Q_2(y)$ – функции, непрерывные при рассматриваемых значениях x и y.

Это дифференциальное уравнение может быть приведено к дифференциальному уравнению с разделенными переменными. Действительно, деля обе части уравнения на $P_2(x)Q_1(y)$. Получим

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0. \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение (5) – это дифференциальное уравынение с разделенными переменными. Его общий интеграл мы находить умеем.

Отметим, что при делении на произведение $P_2(x)Q_1(y)$ мы могли потерять некоторые решения. Именно такие, которые обращают в нуль это произведение. Важно уметь находить эти решения. Поступаем следующим образом.

Приравнивая к нулю указанное выше произведение, получаем два уравнения $P_2(x) = 0$, $Q_1(y) = 0$.

Пусть $x = a$, $y = b$ являются решениями этих уравнений. Нетрудно убедиться, что они являются также и решениями исходного уравнения (4).

Таким образом, если мы ко всем решениям уравнения (5) добавим $x = a$, $y = b$, то получим все решения исходного уравнения (4).

Пример 3. Решить уравнение $x(1+y^2) + y(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0.$$

Деля обе части этого уравнения на произведение $(1+x^2)(1+y^2)$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0.$$

Интегрируя это уравнение, последовательно находим

$$\int\frac{xdx}{1+x^2} + \int\frac{ydy}{1+y^2} = C_1,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = \frac{1}{2}\ln C \qquad \left(\frac{1}{2}\ln C = C_1\right).$$

Отсюда $(1+x^2)(1+y^2) = C$.

§ 4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1. Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно своих аргументов x и y, если для любого значения t имеет место тождество

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Например, $f(x, y) = xy - x^2$ – однородная функция второго измерения, так как $\forall t$ имеет место тождество

$$f(tx, ty) = (tx)(ty) - (tx)^2 = t^2(xy - x^2) = t^2 f(x, y).$$

Рассмотрим два свойства однородных функций.

1^0. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения, то их частное является однородной функцией нулевого измерения.

Действительно, имеем

$$\frac{P(tx, ty)}{Q(tx, ty)} = \frac{t^n P(x, y)}{t^n Q(x, y)} = t^0\,\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

2^0. Если $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого измерения, то она может быть представлена в следующем виде:

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Действительно, воспользуемся определением однородной функции нулевого измерения, взяв $t=\frac{1}{x}$.

$$f\left(\frac{1}{x}x,\frac{1}{x}y\right)=f(x,y),\text{ т.е. } f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Полагая $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$, получаем, что $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Определение 2. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)=0, \tag{1}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

В силу свойств 1^0 и 2^0, уравнение (1) может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1'}$$

Покажем, что интегрирование однородного дифференциального уравнения первого порядка (1') с помощью специальной подстановки сводится к интегрированию уравнения с разделяющимися переменными.

Положим $u=\frac{y}{x}$,

т.е.

$$y=u\,x. \tag{2}$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1'), получаем $x\frac{du}{dx}+u=\varphi(u)$, т.е. $x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$.

Мы получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь:

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|u|+c. \tag{4}$$

Полагаем $\Phi(u)=\int\frac{du}{\varphi(u)-u}$. Тогда, если учесть, что $u=\frac{y}{x}$, получаем

$$\Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c.$$

Это и есть общий интеграл дифференциального уравнения (1').

Замечание 1. При разделении переменных мы могли потерять некоторые решения. Важно их найти. Как это делать, показано в § 3.

Замечание 2. При интегрировании дифференциального уравнения (1) необязательно приводить его к виду (1'). Достаточно убедиться, что уравнение является однородным, а затем применить подстановку (2).

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$xdy - \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = 0. \tag{5}$$

Решение. Коэффициенты при dx и dy соответственно равны:

$$P(x, y) = -(y + \sqrt{x^2 + y^2}),\ Q(x, y) = x.$$

Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными функциями первого измерения. Действительно,

$$P(tx, ty) = -(ty + \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}) = -t(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = t\,P(x, y),$$

$$Q(tx, ty) = tx = t\,Q(x, y).$$

Таким образом, уравнение (5) является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Пусть $y = u\,x$, тогда $dy = u\,dx + xdu$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$x(udx + xdu) - \left(ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2}\right)dx = 0.$$

После преобразований получаем уравнение

$$xdu - \sqrt{1 + u^2}\,dx = 0,$$

которое является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\ln|x| = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + 1}\right| + \ln|C|,$$

откуда

$$x = C(u + \sqrt{u^2 + 1}).$$

Подставляя сюда выражение $u = \dfrac{y}{x}$, получаем $x = C\left(\dfrac{y}{x} + \sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 1}\right)$ или $\dfrac{x^2}{C} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Возведя в квадрат обе части равенства и сокращая на x^2, получим общий интеграл $x^2 - 2Cy = C^2$, который геометрически представляет собой совокупность парабол с вершинами на оси Oy.

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $p(x)$, $f(x)$ – непрерывные на интервале (a, b) функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется линейным однородным, если $f(x) \not\equiv 0$, то данное дифференциальное уравнение называется неоднородным.

Сначала займемся интегрированием линейного однородного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0, \tag{2}$$

соответствующего данному неоднородному.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|c|,$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{3}$$

где C – произвольная постоянная, отличная от нуля адрозная ад нуля.

При разделении переменных мы потеряли решение $y = 0$, но оно может быть включено в семейство решений (3), если разрешить C принимать и значение 0.

Таким образом,

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{4}$$

где C – произволная постоянная, есть общее решение дифференциального уравнения (2).

Для интегрирования линейного неоднородного дифференциального уравнения (1) используем метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Сущность этого метода заключается в следующем.

Сначала интегрируем соответствующее линейное однородное уравнение (2), общее решение которого, как показано выше, имеет вид (4). Теперь решение линейного неоднородного уравнения (1) будем искать в аналогичном виде, т.е. в виде

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{5}$$

где $c(x)$ – неизвестная функция.

Подставляя выражение (5) в уравнение (1), получим:

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Таким образом, для нахождения функции $c(x)$ пришли к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными.

Интегрируя его, находим:

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C, \tag{6}$$

где C – произвольная постоянная.

Если подставить выражение (6) в (5), будем иметь:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx, \tag{7}$$

где C – произвольная постоянная.

Это и есть общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1).

Проанализируем правую часть формулы (7). Первое слагаемое является общим решение линейного однородного дифференциального уравнения (2). Второе слагаемое является частным решением линейного неоднородного уравнения (1) (оно получается из общего решения (7) при $C = 0$).

Таким образом, общее решение решение линейного неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего линейного однородного уравнения и частного решения данного неоднородного уравнения.

Замечание 1. Формулу (7) запоминать не надо. Надо запомнить лишь метод ее получения.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$y' - 2xy = (x+1)e^{x^2}. \tag{8}$$

Решение. Решим сначала линейное однородное уравнение $y' - 2xy = 0$, соответствующее данному уравнению:

$$\frac{dy}{y} = 2xdx,\ \ln|y| = x^2 + \ln|C|,\ y = Ce^{x^2}.$$

Будем искать общее решение данного уравнения в виде:

$$y = c(x)e^{x^2}.$$

Тогда $y' = c'(x)e^{x^2} + c(x)2xe^{x^2}$. Подставим y и y' в уравнение (8) и получим:

$$c'(x)e^{x^2} = (x+1)e^{x^2},$$

откуда $c'(x) = x+1$, $c(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + C$, где C – произвольная постоянная.

Общее решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right)e^{x^2}.$$

Проинтегрировать дифференциальное уравнение (1) можно и методом Бернулли.

Решение уравнения (1) ищем в виде $y = u(x)v(x)$. Имеем $\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + p(x)uv = f(x)$. Возьмем в качестве $u(x)$ одно из решений уравнения

$\dfrac{du}{dx}+p(x)u=0$, например, $u(x)=e^{-\int p(x)dx}$.

Тогда $v(x)$ находим из уравнения $e^{-\int p(x)dx}\dfrac{dv}{dx}=f(x)$, т.е. $v(x)=\int f(x)e^{-\int p(x)dx}dx+C$, где C – произвольная постоянная.

Перемножая $u(x)$ и $v(x)$, получим общее решение (7) линейного неоднородного уравнения (1).

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2.$$

Рашэнне. Положим $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставим y, y' в заданное уравнение:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=x^2.$$

Объединяем в правой части первое и третье слагаемые:

$$v\left(u'-\frac{u}{x}\right)+uv'=x^2.$$

Приравнивая выражение в скобках к нулю, получаем $u'-\dfrac{u}{x}$=0, т.е. $\dfrac{du}{u}-\dfrac{dx}{x}=0$, откуда $\dfrac{du}{u}=\dfrac{dx}{x}$.

После интегрирования, отбрасывая произвольную постоянную, имеем $\ln|u|=\ln|x|$, откуда u=x.

При таком выборе функции u преобразованное дифференциальное уравнение примет вид $xv'=x^2$, или $v'=x$. Тогда $dv=xdx$, откуда, после интегрирования, $v=\dfrac{x^2}{2}+C$.

Искомое общее решение

$$y=uv=x\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=\frac{x^3}{2}+Cx.$$

Замечание 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n, \tag{9}$$

где $p(x)$, $f(x)$ – непрерывные на интервале (a, b) функции, n – любое отличное от нуля и единицы действительное число. Такое уравнение называется уравнение Бернулли.

Уравнение Бернулли представим в виде

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=f(x). \tag{9'}$$

Такое уравнение приводится к линейному дифференциальному уравнению при помощи подстановки

$$y^{n-1} = u\,. \tag{10}$$

Действительно, если $y^{n-1} = u$, то $u'=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$, откуда

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}\,. \tag{11}$$

Подставляя выражения (10) и (11) в дифференциальное уравнение (9'), получаем

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + p(x)u = f(x)\,.$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое интегрировать умеем.

§ 6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y) = 0\,, \tag{1}$$

левая часть которого является полным дифференциалом некоторой функции, называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

Возникает вопрос: как узнать, когда левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом некоторой функции?

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области D. Для того, чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)$ в области D было полным дифференциалом некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы в области D выполнялось следующее условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \tag{2}$$

При помощи этого условия и будем узнавать, является ли данное дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах.

Чтобы найти общий интеграл уравнения в полных дифференциалах (1), надо найти функцию, для которой левая часть уравнения (1) является полным дифференциалом, и приравнять ее к произвольной постоянной.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0\,.$$

Решение. В данном дифференциальном уравнении

$$P(x,y) = x + y + 1,\ Q(x,y) = x - y^2 + 3\,.$$

Так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то выражение $(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$.

Для искомой функции $F(x,y)$ имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x + y + 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x - y^2 + 3.$$

Из первого уравнения получаем

$$F(x, y) = \int (x + y + 1)dx + C(y) = \frac{x^2}{2} + yx + x + C(y).$$

Для нахождения функции $C(y)$ дифференцируем последнее равенство по y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + C'(y) = x - y^2 + 3,$$

т.е. $C'(y) = -y^2 + 3$. Адсюль $C(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y + C_1$, дзе C_1 – произвольная постоянная.

Поэтому $F(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + x - \frac{y^3}{3} + 3y + C_1$.

Таким образом, уравнение $3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = C$, где C – произвольная постоянная, является общим интегралом данного уравнения в полных дифференциалах.

§ 7. Дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка n:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Будем предполагать, что это уравнение можно решить относительно $y^{(n)}$, т.е. можно записать в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

С понятием решения дифференциального уравнения мы уже знакомы (см. § 1). Задача Коши для дифференциального уравнения (1) формулируется следующим образом: найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{l} y = y_0, \\ y' = y_0', \\ y'' = y_0'', \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \;\; x = x_0 \end{array}\right\}, \tag{2}$$

где $x_0,\ y_0,\ y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, называемые начальными данными.

В случае дифференциального уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ задача Коши заключается в нахождении решения $y = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{array}{l} y = y_0, \\ y' = y_0' \quad \text{при} \;\; x = x_0. \end{array}$$

С геометрической точки зрения задача заключается в нахождении интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей в этой точке заданный наклон (угловой коэффициент) касательной:

Задача. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y'' = -1$, проходящую через точку $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ и касающуюся прямой, которая параллельна прямой $x + y = 0$.

Решение. Задача заключается в нахождении интегральной кривой, удовлетворяющей следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}, \\ y' = -1 \quad \text{при} \;\; x = 1 \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Приступим к решению сформулированной задачи. Интегрируя данное уравнение, получим:

$$y' = -x + C_1,$$

$$y = -\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2, \tag{4}$$

где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные.

Итак, $y = -\dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ – семейство всех решений данного дифференциального уравнения $y'' = -1$.

Чтобы найти нужную нам интегральную кривую, необходимо, используя начальные условия, определить $C_1,\ C_2$. Используем начальные условия (3) и получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C_1 + C_2, \\ -1 = -1 + C_1, \end{cases}$$

откуда следует, что $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Подставим найденные значения C_1, C_2 в (4) и получим искомую интегральную кривую $y = -\frac{x^2}{2} + 1$.

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (1).

Теорема. Пусть дано дифференциальное уравнение (1) с начальными условиями (2).

Если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные по аргументам y, y', …, $y^{(n-1)}$, то на некотором отрезке $[x_0–h, x_0+h]$ существует единственное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Введем сейчас понятие общего решения дифференциального уравнения (1).

Пусть D – некоторая область, в каждой точке $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ которой задача Коши имеет единственное решение. Такой областью, в частности, является область, в окрестности каждой точки которой выполнены условия сформулированной выше теоремы.

Определение. Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ называется общим решением дифференциального уравнения (1) в области D, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1^0. При любых значениях $C_1, C_2, ..., C_n$, взятых из некоторых множеств, она будет решением дифференциального уравнения (1).

2^0. При надлежащем подборе $C_1, C_2, ..., C_n$ она обращается в решение данного уравнения, удовлетворяющее любым наперед заданным начальным условиям (2), где $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in D$.

Условие 2^0 можно сформулировать и так: какими бы небыли начальные условия (2), всегда можно найти такие значения $C_1 = C_1^*$, $C_2 = C_2^*$, …, $C_n = C_n^*$, что функция $y = \varphi(x, C_1^*, C_2^*, …, C_n^*,)$ будет решением дифференциального уравнения (1), которое удовлетворяет этим начальным условиям.

Те решения, которые получаются из общего решения при конкретных значениях C_1, C_2, …, C_n, называются частными решениями.

Вернемся к рассмотренному выше дифференциальному уравнению $y'' = -1$. Очевидно, что $y = -\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ – общее решение этого уравнения. Решение $y = -\frac{x^2}{2} + 1$, удовлетворяющее начальным условиям (3), является частным решением.

§ 8. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим три частных случая, когда дифференциальное уравнение

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

с помощью замены переменной сводится к дифференциальному уравнению первого порядка. Такое преобразование уравнения (1) называется понижением порядка.

1. Уравнение вида

$$y'' = f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ – функция, непрерывная на некотором интервале $a < x < b$.

Вводим новую функцию $Z(x)$, полагая $Z(x) = y'$. Тогда $Z'(x) = y''$, и уравнение преобразуется в уравнение первого порядка: $Z'(x) = f(x)$. Решив его, находим $Z(x) = \int f(x)dx + C_1$. Так как $Z(x) = y'$, то $y' = \int f(x)dx + C_1$. Отсюда, проинтегрировав еще раз, получим

$$y = \int \left(\int f(x) \right) dx + C_1 x + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Это и есть общее решение уравнения (2) в области D: $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$.

2. Уравнение вида

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{3}$$

Характерным для уравнения (3) является то, что оно не содержит y.

Полагаем $y' = Z(x)$ и, значит, $y'' = Z'(x)$, тогда получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F(x, Z, Z') = 0. \tag{4}$$

Пусть

$$Z = \varphi(x, C_1) \tag{5}$$

есть общее решение уравнения (4). Заменяя в левой части (5) Z обратно через y', получим уравнение:

$$y' = \varphi(x, C_1).$$

Отсюда находим

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Это и есть общее решение дифференциального уравнения (3).

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3\frac{y'}{x} = x.$$

Решение. Полагаем $y' = Z(x)$ и получим линейное уравнение первого порядка $Z' - 3\frac{Z}{x} = x$. Решив его, найдем $Z(x) = C_1 x^3 - x^2$. Тогда $y' = C_1 x^3 - x^2$ и

$y = C_1\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + C_2$ – искомое решение.

3. Уравнение вида

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{6}$$

Это уравнение не содержит явно переменную x.

Вводим новую функцию $z(y)$, полагая $y' = z(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot z(y).$$

Подставим в уравнение (6) выражения для y' и y'', получим уравнение первого порядка относительно z как функции от y:

$$F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0. \tag{7}$$

Пусть его общее решение есть

$$Z = \varphi(y, C_1).$$

Так как $z = \dfrac{dy}{dx}$, то $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$. Отсюда $\dfrac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$. Получили уравнение с разделенными переменными, из которого находим общий интеграл заданного уравнения:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Пример 2. Принтегрировать дифференциальное уравнение

$$yy'' + (y')^2 = 1 \quad (y > 0).$$

Решение. Полагая $y' = z(y)$, имеем $y'' = \dfrac{dz}{dy}z$. Тогда уравнение примет вид $y\dfrac{dz}{dy}z + z^2 = 1$ или $yzdz + (z^2 - 1)dy = 0$, откуда, разделяя переменные и интегрируя, находим

$$z = \pm\frac{\sqrt{C_1 + y^2}}{y}.$$

Заменяя z на y', имеем

$$y' = \pm\frac{\sqrt{C_1 + y^2}}{y} \text{ или } \pm\frac{ydy}{\sqrt{C_1 + y^2}} = dx.$$

Проинтегрировав, получим

$$\pm\sqrt{C_1 + y^2} = x + C_2 \text{ или } (x + C_2)^2 - y^2 = C_1.$$

§ 9. Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Определение. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

где функции $a_1(x),...,a_n(x), f(x)$ непрерывны на некотором интервале (a,b), называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Введем оператор $L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y$. Тогда дифференциальное уравнение (1) может быть записано в виде:

$$L(y) = f(x). \qquad (2)$$

Уравнение (1) называется однородным, если на интервале (a,b) функция $f(x) \equiv 0$. Если функция $f(x) \not\equiv 0$ на интервале (a,b), то уравнение (1) называется неоднородным.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$ и произвольный набор чисел $y_0, y_0', y_0'',..., y_0^{(n-1)}$.

Можно доказать, что существует единственное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} y = y_0, \\ y' = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \;\; x = x_0. \end{cases} \qquad (3)$$

§ 10. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Будем изучать дифференциальные уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0, \qquad (1)$$

т.е.

$$L(y) = 0. \qquad (2)$$

Определение 1. Функции $y_1, y_2,..., y_n$ называются *линейно зависимыми* на интервале (a,b), если существуют такие постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, не все равные нулю ($C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2 \neq 0$), что

$$C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n \equiv 0 \text{ при } a < x < b.$$

В противном случае данные функции называются *линейно независимыми.*

Определение линейной зависимости функций эквивалентно следующему утверждению: по крайней мере одна из функций $y_1, y_2,..., y_n$ является линейной комбинацией остальных.

Можно доказать теорему, которую называют достаточным условием линейной независимости функций.

Теорема 1. Пусть даны функции $y_1, y_2, ..., y_n$. Если определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a, b), то функции $y_1, y_2, ..., y_n$ линейно независимые на интервале (a, b).

Можно доказать теорему, которая описывает структуру общего решения дифференциального уравнения (1).

Теорема 2. Если $y_1, y_2, ..., y_n$ – какие-либо *n* линейно независимые решения дифференциального уравнения (1), то функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{3}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – произвольные постоянные, есть общее решение этого уравнения в области *D*:

$$a < x < b,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < y' < +\infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < +\infty.$$

§ 11. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$L(y) = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{1}$$

где a_1, a_2 – константы.

Найдем общее решение этого дифференциального уравнения. Для этого сначала найдем два линейно независимые решения y_1, y_2, а затем общее решение найдем по формуле $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Частные решения дифференциального уравнения (1) будем искать в виде $y = e^{kx}$, где k – некоторое число.

Подставим функцию $y = e^{kx}$ в левую часть дифференциального уравнения (1). Получим $e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2)$.

Так как $e^{kx} \neq 0$, то это выражение равно нулю тогда и только тогда, когда k будет корнем уравнения

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения. (1).

Возможны три случая.

1. Характеристическое уравнение (2) имеет два различные действительные корни k_1 і k_2. Тогда $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ – два решения уравнения (1). Причем эти решения являются линейно независимыми,так как

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix}=e^{(k_2+k_1)x}(k_2-k_1)\neq 0.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения (1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'-3y=0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-2k-3=0$ имеет корни $k_1=-1,\ k_2=3$. Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

2. Характеристическое уравнение (2) имеет двукратный корень k.

В этом случае общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид $y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+4y=0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2-4k+4=0$. Оно имеет двукратный корень $k=2$. Общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

3. Характеристическое уравнение (2) имеет два сопряженные комплексные корни $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$.

Общее решение дифференциального уравнения (1) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'+13y=0.$$

Решение. Корнями характеристического уравнения $k^2-4k+13=0$ являются сопряженные комплексные корни $k_{1,2}=2\pm 3i$. $y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x$ – общее решение.

§ 12. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=f(x) \qquad (1)$$

где $a_1(x),...,a_n(x),\ f(x)\not\equiv 0$ – функции, непрерывные на некотором интервале (a,b)

Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=0 \tag{2}$$

Теорема 1. Сумма какого-либо частного решения неоднородного уравнения (1) и общего решения соответствующего ему однородного дифференциального уравнения (2) есть общее решение данного неоднородного дифференциального уравнения (1).

Причем это общее решение рассматривается в области D:

$$a<x<b,\ -\infty<y<+\infty,\ -\infty<y'<+\infty,\ldots,-\infty<y^{(n-1)}<+\infty.$$

Рассмотрим метод вариации произвольных постоянных в случае линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$L(y)=y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x). \tag{3}$$

Пусть известно общее решение

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{4}$$

соответствующего ему однородного уравнения

$$L(y)=y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0.$$

Тогда общее решение уравнения (3) может быть найдено по формуле

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2,$$

где функции $C_1(x),C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0,\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x). \end{cases} \tag{5}$$

Пример. Найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения

$$y''-3y'+2y=e^{3x}. \tag{6}$$

Решение. Сначала рассмотрим соответствующее уравнению (6) однородное дифференциальное уравнение

$$y''-3y'+2y=0 \tag{7}$$

и найдем его общее решение $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (6) будем искать в виде:

$$y=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{2x}, \tag{8}$$

где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{2x}=0,\\ C_1'(x)e^x+C_2'(x)2e^{2x}=e^{3x}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & e^{2x}\\ e^{3x} & 2e^{2x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{x} & e^{2x}\\ e^{x} & 2e^{2x}\end{vmatrix}}=-e^{2x},$$

$$C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^{x} & 0\\ e^{x} & e^{3x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{x} & e^{2x}\\ e^{x} & 2e^{2x}\end{vmatrix}}=e^{x}.$$

Отсюда следует, что $C_1(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}+C_1,\ C_2(x)=e^{x}+C_2$.

Таким образом, функция

$$y=\mathrm{C}_1e^{x}+C_2e^{2x}+e^{3x}-\frac{1}{2}e^{3x}=\mathrm{C}_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x},$$

где C_1,C_2 – произвольные постоянные, является общим решение дифференциального уравнения (6).

§ 13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$L(y)=y''+a_1y'+a_2y=f(x). \tag{1}$$

Рассмотрим также соответствующее ему однородное дифференциальное уравнение

$$L(y)=y''+a_1y'+a_2y=0. \tag{2}$$

Если k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения

$$\varphi(k)\equiv k^2+a_1k+a_2=0, \tag{3}$$

то общее решение уравнения (2) записывается в одном из следующих трех видов:

1) $y=C_1(x)e^{k_1x}+C_2(x)e^{k_2x}$, если k_1 и k_2 действительные и $k_1\neq k_2$;

2) $y=e^{k_1x}(C_1+C_2x)$, если $k_1=k_2$;

3) $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$, если $k_1=\alpha+\beta i$ и $k_2=\alpha-\beta i$ ($\beta\neq0$).

Рассмотрим вопрос нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (1). Это можно сделать с помощью метода вариации произвольных постоянных. Если правая часть дифференциального уравнения (1) имеет специальный вид, то это можно сделать и другим способом.

Как известно, общее решение неоднородного уравнения (1) находится по формуле

$$y=\overline{y}+Y,$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (2), Y – какое-нибудь частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1). Общее решение $\bar{y}$ однородного дифференциального уравнения (2) мы находить умеем. Оно определяется одной из формул 1)–3). Функцию Y можно найти методом неопределенных коэффициентов в следующих случаях:

1. $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Если α не является корнем характеристического уравнения (3), то полагают $Y=e^{\alpha x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если α является корнем характеристического уравнения (3), то $Y=x^r e^{\alpha x}Q_n(x)$, где r – кратность корня α ($r=1$ или $r=2$).

2. $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно.

Если $\varphi(\alpha\pm\beta i)\neq 0$, то полагают

$$Y=e^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x),$$

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени $N=\max(n,m)$.

Если $\varphi(\alpha\pm\beta i)=0$, то

$$Y=xe^{\alpha x}(S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x).$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-7y'+10y=x^2. \tag{4}$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-7k+10=0$ имеет корни $k_1=2$ и $k_2=5$.

Общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения определяется формулой

$$\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}.$$

Правая часть (4) имеет вид: $f(x)=x^2\equiv e^{\alpha x}P_n(x)$. Здесь $\alpha=0$, $n=2$. Значит, $Y=Ax^2+Bx+C$.

Дифференцируя функцию Y два раза и подставляя в данное уравнение выражения для Y, Y', Y'', получим:

$$10Ax^2+(10B-14A)x+(2A-7B+10C)=x^2,$$

откуда $10A=1$, $10B-14A=0$, $2A-7B+10C=0$. Решив полученную систему уравнений, находим:

$$A=0{,}1;\ B=0{,}14;\ C=0{,}078.$$

поэтому

$$Y=0{,}1x^2+0{,}14x+0{,}078.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения (4) имеет следующий вид:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+0{,}1x^2+0{,}14x+0{,}078,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

РАЗДЕЛ 7. РЯДЫ

ТЕМА 7.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Основные понятия

Пусть задана числовая последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Из членов этой последовательности чисто формально составим следующее выражение:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad . \tag{1}$$

Это выражение называется числовым рядом или просто рядом. числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называются членами ряда.

$a_n (n = 1,2,3,\ldots)$ называется общим членом ряда. Ряд (1) обозначается также следующим образом

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n \, . \tag{1'}$$

Определим сейчас понятие суммы ряда. Сначала рассмотрим следующие суммы:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$

Эти суммы называются частичными суммами ряда (1). Они образуют последовательность (S_n) частичных сумм числового ряда (1).

Определение. Если последовательность частичных сумм ряда сходится, то ряд называется сходящимся, а число

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

называется суммой данного ряда. При этом записывают так:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \text{ или } S = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} a_n \, .$$

Если последовательность частичных сумм ряда расходится, то ряд называется расходящимся.

Отметим, что расходимость ряда может быть двух типов.

1. Последовательность (S_n) имеет бесконечный предел.
2. Последовательность (S_n) не имеет ни конечного, ни бесконечного пределов.

Пример 1. Пусть задан числовой ряд

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots \qquad (a \neq 0) .$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм данного ряда:

$$S_n = na \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = na = \infty$, то данный ряд расходится.

Пример 2. Рассмотрим числовой ряд

$$a+(-a)+a+(-a)+\ldots \qquad (a\neq 0).$$

Этот ряд записывают также так:

$$a-a+a-a+\ldots \quad .$$

Рассмотрим частичные суммы этого ряда:

$$S_1=a\ ,\ S_2=a\ -a\ =0,\ S_3=a-a+a=a,\ S_4=a-a+a-a=0,\ \ldots \quad .$$

Последовательность частичных сумм данного ряда не имеет ни конечного, ни бесконечного пределов. Поскольку это последовательность расходится, то и данный ряд расходится.

Пример 3. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии:

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots \qquad (a\neq 0).$$

Этот ряд также называется геометрической прогрессией.

Исследуем вопрос о сходимости этого ряда. Возможны следующие случаи:

1. Пусть $|q|<1$. Рассмотрим последовательность частичных сумм данного ряда:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Поскольку в данном случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-q}$, то данный ряд сходится, и его сумма равна $\dfrac{a}{1-q}$.

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\frac{a}{1-q}.$$

2. Пусть $|q|>1$. Рассмотрим последовательность частичных сумм данного ряда:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q} \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

В данном случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$. Таким образом, в рассматриваемом случае данный ряд расходится.

3. Пусть $|q|=1$. В этом случае данный ряд имеет следующий вид:

$$a+a+a+\ldots+a+\ldots \qquad (\text{при } q=1),$$

$$a-a+a-a+\ldots \qquad (\text{при } q=-1).$$

Такие числовые ряды, как мы уже знаем, расходятся.

Выводы. В случае $|q|\geq 1$ геометрическая прогрессия является расходящимся рядом. В случае $|q|<1$ геометрическая прогрессия является сходящимя рядом, сумма которого равна $\frac{a}{1-q}$.

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

Пример 4. Пусть дан числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Совершим некоторые преобразования. Поскольку

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

то будем иметь

$$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Данный ряд сходится, так как $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$. Сумма ряда равна 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

§ 2. Основные свойства рядов

Теорема 1. Пусть c – действительное число. Если ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

сходится и имеет сумму S, то ряд

$$ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n + \ldots \qquad (2)$$

также сходится и имеет сумму cS.

Ряд (2) называется произведением ряда (1) на число c.

Теорема 2. Если ряды

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (3)$$

и

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \qquad (4)$$

сходятся и имеют соответственно суммы S и S^*, то ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots \qquad (5)$$

также сходится и имеет сумму $S \pm S^*$.

Ряд (5) называется суммой (разностью) рядов (3) и (4).

Теорема 3 (*необходимый признак сходимости*). Если ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится, то его общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Следствие. Если общий член ряда не стремится к нулю, то данный ряд расходится.

Пример 1. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n+2}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+2} = 3 \neq 0$, то данный ряд расходится.

Замечание. Стремление к нулю общего члена ряда является необходимым условием, но не является достаточным условием сходимости ряда.

Пример 2. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Этот ряд называется гармоническим рядом. Общий член данного ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Но, как покажем далее, гармонический ряд является расходящимся рядом.

Теорема 4. Отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или добавление к началу ряда конечного числа новых членов не влияют на сходимость или расходимость ряда.

Рассмотрим два ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots, \tag{6}$$

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} + \ldots \quad . \tag{7}$$

Заметим, что частичную сумму S_m^* ряда (7) можно записать в следующем виде: частичная сумма S_{n+m} ряда (6) минус постоянная величина S_n:

$$S_m^* = S_{n+m} - S_n. \tag{8}$$

Определение. Пусть ряд (6) сходится. Тогда сходится и ряд (7). Сумма ряда (7) называется остатком ряда (6) после n-го члена и обозначается R_n.

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m} + \ldots \quad .$$

Изучим сейчас вопрос о связи между суммой S сходящегося ряда, его n-ой частичной суммой S_n и остатком R_n пасля n-го члена. С этой целью в равенстве (8) перейдем к пределу при $m \to \infty$ (n – фиксированное). Получим

$$R_n = S - S_n, \tag{9}$$

откуда

$$S = S_n + R_n. \tag{10}$$

Равенство (10) устанавливает искомую взаимосвязь.

Перейдем сейчас в равенстве (9) к пределу при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = \lim_{n\to\infty} S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Теорема 5. Остаток после n-го члена сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

§ 3. Положительные ряды

Определение. Ряд называется положительным, если все его члены неотрицательные. Если все его члены положительные, то данный ряд называется строго положительным.

Теорема 1 (*необходимый и достаточный признак сходимости положительного ряда*). Для того чтобы положительный ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

С помощью теоремы 1 можно доказать один важный достаточный признак сходимости ряда.

Теорема 2 (*признак сравнения*). Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{B}$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$a_n \le b_n, \tag{1}$$

то сходимость ряда (B) влечет за собой сходимость ряда (A), а расходимость ряда (A) влечет за собой расходимость ряда (B).

Замечание 1. В формулировке теоремы 2 можно требовать, чтобы неравенство (1) выполнялось не для всех n, а начиная с некоторого номера, т.е. для всех достаточно больших n.

Следствие (*признак сравнения в предельной форме*). Пусть ряд (A) положительный, а ряд (B) строго положительный. Если существует конечный отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \quad (0 < k < +\infty),$$

то ряды (A) и (B) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}. \tag{2}$$

Исследуем сходимость этого ряда. Будем сравнивать этот ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \tag{3}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n$$

и ряд (3) сходится (ряд (3) является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$), то согласно теореме 2 сходящимся будет и ряд (2).

Сходимость ряда (2) можно также доказать с помощью признака сравнения в предельной форме.

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n+1}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^n}=1,$$

и ряд (3) сходится, то ряд (2) также будет сходящимся.

Изучим еще несколько достаточных признаков сходимости положительных рядов.

Теорема 3 (*признак Даламбера*). Пусть дан строго положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,. \tag{A}$$

Если для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1,$$

то ряд (A) сходится.

Если

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1,$$

то ряд (A) расходится.

Следствие (*признак Даламбера в предельной форме*). Пусть дан строго положительный ряд (A). Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$$

то при $l<1$ ряд (A) сходится, при $l>1$ ряд (A) расходится, при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 2. Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$$

Будем пользоваться признаком Даламбера в предельной форме.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}3^n n!}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Данный числовой ряд расходится.

Теорема 4 (*признак Коши*). Пусть дан положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{A}$$

Если для всех достаточно больших n имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1,$$

то ряд (A) сходится.

Если же

$$\sqrt[n]{a_n} \ge 1,$$

то ряд (A) расходится.

Следствие (*примета Коши в предельной форме*). Пусть дан положительный ряд (A). Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l,$$

то при $l<1$ ряд (A) сходится, при $l>1$ ряд расходится, а при $l=1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 3. Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Будем пользоваться признаком Коши в предельной форме.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{-n})^{-n})^{-1} = e^{-1} < 1.$$

Делаем вывод, что данный ряд сходится.

Теорема 5 (*интегральный признак Коши*). Пусть функция $f(x)$ непрерывна, положительна и невозрастающая на промежутке $[1,+\infty)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{4}$$

сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx.$ Если же несобственный интеграл расходится, то и ряд (4) расходится.

Пример 4. Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \tag{5}$$

где α – действительное число.

Отметим, что ряд (5) называется рядом Дирихле или обобщенным гармоническим рядом.

Если $\alpha \le 0$, то ряд (5) расходится, так как его общий член не стремится к нулю (смотри следствие из теоремы 3 § 2). Проведем исследование в случае $\alpha > 0$.

Ряд (5) можно представить в виде (4), если взять функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$. В случае $\alpha > 0$ эта функция является положительной, непрерывной и невозрастающей на промежутке $[1;+\infty)$, поэтому, согласно с теоремой 5, ряд (5) сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$.

Как известно, такой несобственный интеграл сходится при $\alpha > 1$, а расходится при $0 < \alpha \le 1$.

Вывод. Ряд (5) сходится при $\alpha > 1$, а расходится при $\alpha \le 1$.

Замечание 2. В теореме 5 вместо ряда (4) можно рассматривать ряд $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$. Тогда вместо несобственного интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ необходимо рассматривать несобственный интеграл $\int_m^{+\infty} f(x)dx$. Функция $f(x)$ предполагается положительной, непрерывной и невозрастающей на промежутке $[m;+\infty]$.

Пример 5. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Данный ряд сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

Исследуем на сходимость этот интеграл.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln |\ln x| \Big|_2^b = \lim_{b \to +\infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Так как рассматриваемый несобственный интеграл расходится, то и данный числовой ряд расходится.

§ 4. Знакочередующиеся ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение 1. Ряд называется знакочередующимся, если его члены имеют поочередно то положительные, то отрицательные знаки.

Знакочередующийся ряд записывают в таком виде, чтобы были выявлены знаки его членов:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots, \tag{1}$$

где $a_n > 0 \quad \forall n$.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий достаточный признак сходимости.

Теорема 1 (*признак Лейбница*). Если члены знакочередующегося ряда, взятые по модулю, образуют убывающую бесконечно малую последовательность, то этот ряд сходится.

Ряд (1), для которого выполняются условия теоремы 1, называется рядом Лейбница.

Пример 1. Доказать сходимость знакочередующегося ряда

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{2n}+\ldots\,. \tag{2}$$

Решение. Ряд (2) является рядом Лейбница, так как

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{4}>\frac{1}{6}>\frac{1}{8}>\ldots>\frac{1}{2n}>\ldots; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

Таким образом, по признаку Лейбница данный ряд (2) сходится.

Можно доказать, что сумма S ряда Лейбница положительна и не превышает первого члена этого ряда: $0<S\leq a_1$.

Этот вывод можно использовать для нахождения остатка ряда Лейбница.

Рассмотрим остаток ряда Лейбница после n-го члена:

$$R_n=(-1)^n a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_{n+2}+\ldots \quad .$$

Очевидно, что

$$R_n=(-1)^n(a_{n+1}-a_{n+2}+\ldots).$$

Ряд, стоящий в круглых скобках, является рядом Лейбница, поэтому можно воспользоваться указанным выше выводом. Получаем, что сумма ряда, стоящего в скобках, положительная и не превосходит a_{n+1}.

Отсюда следует, что остаток ряда Лейбница после n-го члена $R_n=\left(-1\right)^n a_{n+1}+\left(-1\right)^{n+1}a_{n+2}+\ldots$ имеет знак первого своего члена и по модулю не превосходит его: $\left|R_n\right|\leq a_{n+1}$.

Если заметить, что $R_n=S-S_n$, то полученный вывод можно сформулировать так: если сумму S ряда Лейбница заменить его частичной суммой S_n, то мы совершим ошибку, которая имеет тот же знак, что и первый отбрасываемый член, и по модулю не превосходит его.

Этот вывод имеет большое значение в приближенных вычислениях с помощью рядов.

Пример 2. Найти приближенно с точностью до 0,01 сумму ряда

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{\left(2n\right)^3}+\ldots\,.$$

Решение. Очевидно, что все условия теоремы 1 выполняются: ряд знакочередующийся, его члены по модулю монотонно убывают и стремятся к нулю. Следовательно, этот ряд сходится.

Чтобы вычислить сумму данного ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше 0,01, т.е. $\dfrac{1}{\left(2n\right)^3}<0{,}01$.

Для данного ряда модуль четвертого члена $\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{1}{216}<0{,}01$, поэтому с точностью до 0,01 имеем:

$$S\approx 1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}=1-\frac{1}{8}+\frac{1}{64}=\frac{57}{64}\approx 0{,}89\,.$$

Определение 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{3}$$

члены которого имеют произвольные знаки, называется знакопеременным.

Определение 3. Ряд (3) называется абсолютно сходящимся рядом, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{4}$$

Если же ряд (3) сходится, а ряд (4) расходится, то ряд (3) называется условно сходящимся рядом.

Для знакопеременных абсолютно и условно сходящихся рядов имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. Абсолютно сходящийся ряд сходится, т.е. из сходимости ряда (4) следует сходимость ряда (3), причем $|S| \le \sigma$, где S и σ – суммы рядов (3) и (4) соответственно.

Теорема 3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся, то при любых α и β ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ также абсолютно сходится.

Теорема 4 (*теорема Дирихле*). Если ряд сходится абсолютно, то при любой перестановке его членов мы получим также абсолютно сходящийся ряд, имеющий ту же сумму, что и исходный ряд.

Теорема 5 (*теорема Римана*). Если ряд (3) сходится условно, то при надлежащей перестановке его членов мы можем получить ряд, с любой наперед заданной суммой, или даже расходящийся ряд.

Исследуя на абсолютную сходимость ряд (3), мы можем к ряду (4) применять известные признаки сходимости положительных рядов. Однако признаками расходимости необходимо пользоваться очень осторожно. Дело в том, что если ряд (4) даже будет расходящимся, то ряд (3) может сходиться. Однако отметим, что признаки расходимости Даламбера и Коши мы можем смело использовать. Дело в том, что при их выполнении $|a_n|$, т.е. общий член ряда (4), не стремится к нулю, а тогда к нулю не стремится и a_n, т.е. общий член исходного ряда (3). Поэтому ряд (3) расходится (ряд не удовлетворяет необходимому признаку сходимости).

Приведем формулировки признаков Даламбера и Коши.

Теорема 6. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$ то при $l < 1$ ряд (3) сходится абсолютно, а при $l > 1$ ряд (3) расходится.

Теорема 7. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$ то при $l < 1$ ряд (3) сходится абсолютно, а при $l > 1$ ряд (3) расходится.

Пример 3. Исследовать, абсолютно или условно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3\sqrt[3]{n}-1}. \qquad (5)$$

Решение. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, составленный из абсолютных величин членов ряда (5):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{n}-1}. \qquad (6)$$

Сравниваем этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{n}}$. Так как $3\sqrt[3]{n}-1 < 3\sqrt[3]{n}$, то $\frac{1}{3\sqrt[3]{n}-1} > \frac{1}{3\sqrt[3]{n}}$ для всех n. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{n}}$ расходится, так как расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (как ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = \frac{1}{3} < 1$). Следовательно, согласно с признаком сравнения расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{n}-1}$.

Таким образом, исходный ряд (5) не является абсолютно сходящимся.

Выясним, сходится ли данный знакочередующийся ряд (5), используя признак Лейбница.

Проверим, выполняется ли неравенство $a_n > a_{n+1}$ для абсолютных величин членов данного ряда:

$$a_n = \frac{1}{3\sqrt[3]{n}-1} > \frac{1}{3\sqrt[3]{n+1}-1} = a_{n+1}.$$

Данное неравенство равносильно неравенству $3\sqrt[3]{n}-1 < 3\sqrt[3]{n+1}-1$, которое имеет место для любого n=1,2,... . Значит, $a_n > a_{n+1}$ для всех номеров n=1,2,... .

Найдем предел общего члена ряда (6):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3\sqrt[3]{n}-1} = 0.$$

Таким образом, для данного знакочередующегося ряда (5) выполняются условия, содержащиеся в признаке Лейбница, откуда следует, что исходный ряд (5) сходится. Но он не является абсолютно сходящимся, поэтому данный ряд (5) сходится условно.

Пример 4. Исследовать, абсолютно или условно сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}. \qquad (7)$$

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ из абсолютных величин членов данного ряда, т.е. ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n+1)}. \qquad (8)$$

Для ответа на вопрос о сходимости ряда используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\frac{1}{2}<1.$$

Таким образом, ряд (8) сходится, т.е. ряд (7) является абсолютно сходящимся.

ТЕМА 7.2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Функциональные ряды

Пусть на множестве X задана функциональная последовательность

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots.$$

Рассмотрим выражение

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots . \tag{1}$$

Это выражение называется функциональным рядом. Функциональный ряд (1) обозначают также $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Составим следующие суммы:

$$S_1(x) = u_1(x),$$
$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x),$$
$$S_3(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Они называются частичными суммами функционального ряда (1).

Определение 1. Функциональный ряд (1) называется сходящимся в точке $x_0 \in \mathrm{X}$ или при $x = x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, т.е в рассматриваемой точке сходится последовательность $(S_n(x))$ частичных сумм данного ряда. При этом точка x_0 называется точкой сходимости ряда (1).

Функциональный ряд (1) называется расходящимся в точке $x_0 \in \mathrm{X}$ или при $x = x_0$, если расходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, т.е. в рассматриваемой точке расходится последовательность $(S_n(x))$ частичных сумм данного ряда. При этом точка x_0 называется точкой расходимости ряда (1).

Определение 2. Множество всех точек сходимости функционального ряда (1) называется областью сходимости этого ряда, а множество всех точек расходимости – областью расходимости ряда.

Может случиться, что в некоторой точке $x_0 \in \mathrm{X}$ функциональный ряд (1) сходится абсолютно, т.е сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|$, а в некоторой точке $x_1 \in \mathrm{X}$ ряд (1) сходится условно, т.е. числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x_1)|$ расходится, а числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1)$ сходится. Поэтому отличают также области абсолютной и условной сходимости функционального ряда.

Определение 3. Функциональный ряд (1) называется сходящимся на множестве *X*, если он сходится в каждой точке этого множества, т.е. на этом множестве сходится его последовательность частичных сумм $(S_n(x))$. При этом предельная функция $S(x)$ последовательности $(S_n(x))$ $\left(S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)\right)$ называется суммой функционального ряда (1).

Если $S(x)$ является суммой функционального ряда (1), то этот факт записывают так:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Пример 1. Рассмотрим функциональный ряд

$$1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+\dots \quad . \tag{2}$$

При каждом значении x данный ряд является геометрической прогрессией со знаменателем x. Известно, что такой ряд сходится, если $|x|<1$, и расходится, если $|x|\geq 1$.

Таким образом, областью сходимости ряда (2) является интервал $(-1;1)$, а область расходимости $-(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

Сумма ряда (2) равна $\dfrac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots$$

$$(-1<x<1).$$

Зафиксируем еще раз наше внимание на функциональном ряде (1).

Для каждого натурального *n* можно построить ряд

$$u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\dots . \tag{3}$$

Этот ряд будет сходиться в каждой точке сходимости ряда (1). Сумму ряда (2) обозначим через $R_n(x)$:

$$R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots \ .$$

Она называется остатком ряда (1) после *n*-го члена.

В каждой точке сходимости ряда (1) имеет место равенство

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x),$$

т.е.

$$S(x)=S_n(x)+R_n(x).$$

Отсюда следует, что в каждой точке сходимости ряда (1) имеет место следующее равенство:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

Для нахождения областей сходимости функциональных рядов можно использовать табличные ряды и достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^n.$$

Решение. Данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{x+2}{x+3}$. Как известно, геометрическая прогрессия сходится тогда и только тогда, когда $|q|=\left|\frac{x+2}{x+3}\right|<1$. Последнее неравенство равносильное неравенствам

$$-1<\frac{x+2}{x+3}<1,$$

откуда получаем, что промежуток $\left(-\frac{5}{2};+\infty\right)$ – область сходимости исходного ряда.

Пример 3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}.$$

Решение. Используя признак Коши, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-nx}}=e^{-x}\begin{cases}<1 & \text{при} \quad x>0,\\ >1 & \text{при} \quad x<0,\end{cases}$$

откуда делаем вывод, что ряд сходится при положительных x и расходится при отрицательных. В точке x=0 данный ряд превращается в числовой ряд 1+1+1+…+1+… , очевидно, расходящийся.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток (0; +∞).

§ 2. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда

Пусть на множестве X задана функциональная последовательность

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots \qquad (1)$$

Определение 1. Функциональная последовательность (1) называется сходящейся к функции $S(x)$ на множестве X, если в каждой фиксированной точке $x\in X$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x).$$

Это определение можно сформулировать и так.

Функциональная последовательность (1) называется сходящейся к функции $S(x)$ на множестве X, если для каждой фиксированной точки $x\in X$ выполняется следующее условие: для любого положительного числа ε существует такой номер N (зависящий от ε и от x), что для всех $n>N$ выполняется неравенство $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$, где x – та точка, которая была фиксирована.

В этом определении важным является то, что N зависит от ε и, вообще говоря, от x.

Определение 2. Пусть функциональная последовательность (1) сходится к функции $S(x)$ на множестве X. Данная последовательность называется равномерно сходящейся к функции $S(x)$ на множестве X, если для любого положительного числа ε существует такой номер N (зависящий от ε, но независящий от x), что для всех $n > N$ и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

В этом определении важным является то, что N завист ε, но не зависит от x.

Определение 3. Чебышевским расстоянием между функциями $S_n(x)$ и $S(x)$ на множестве X называется величина $\rho_n = \sup\limits_{x \in X} |S_n(x) - S(x)|$.

Отметим, что если $|S_n(x) - S(x)|$ достигает на множестве X наибольшего значения, то ρ_n будет этим наибольшим значением.

Теорема 1. Для того, чтобы функциональная последовательность (1) равномерно сходилась к функции $S(x)$ на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n = 0.$$

Определение 4. Пусть функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (2)$$

сходится на множестве X, $S(x)$ – его сумма. Если последовательность частичных сумм ряда (2) равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X, то функциональный ряд (2) называется равномерно сходящимся на множестве X функциональным рядом.

Теорема 2 (*теорема Вейерштрасса*). Пусть дан функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \quad . \qquad (2)$$

Если существует такой сходящийся положительный числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad (3)$$

что для всех $x \in X$ выполнены неравенства

$$|u_n(x)| \le a_n \quad (n = 1,2,\ldots), \qquad (4)$$

то функциональный ряд (2) абсолютно и равномерно сходится на множестве X.

Если выполнены неравенства (4), то ряд (3) называется мажорантным для ряда (2) на множестве X.

Пример. Рассмотрим функциональныйряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Так как $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ $\quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$ $(n = 1,2,\ldots)$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то данный функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. Если последовательность

$$S_1(x), S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots$$

непрерывных на промежутке X функций, равномерно сходится к функции $S(x)$ на этом промежутке, то предельная функция $S(x)$ непрерывна на промежутке X .

Теорема 4. Если все члены функционального ряда

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

непрерывны на промежутке X , и данный ряд равномерно сходится на этом промежутке, то его сумма $S(x)$ непрерывна на промежутке X .

Теорема 5. Если последовательность функцйий (1), непрерывных на отрезке $[a,b]$, равномерно сходится к функции $S(x)$ на этом отрезке, то имеет место следующее равенство:

$$\int_a^b S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x)\right)dx.$$

Говорят, что допустим переход под знаком интеграла.

Теорема 6. Если все члены функционального ряда (2)

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

непрерывны на отрезке $[a,b]$, и данный ряд равномерно сходится на этом отрезке, то имеет место следующее равенство:

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx,$$

т.е.

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx,$$

где $S(x)$ – сумма ряда (2).

При этом говорят, что на отрезке $[a,b]$ допустимо почленное интегрирование ряда (2).

Теорема 7. Пусть функциональный ряд (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a,b]$ и $S(x)$ – его сумма. Если члены данного ряда имеют на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится на этом отрезке, то функция $S(x)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a,b]$, и всюду на этом отрезке имеет место равенство

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

т.е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

При этом говорят, что в каждой точке отрезка $[a,b]$ допустимо почленное дифференцирование ряда (2).

ТЕМА 7.3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 1. Степенные ряды

Определение 1. Степенным рядом называется функциональный ряд следующего вида

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

или более общего вида

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots, \qquad (2)$$

где a, c_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ – действительные числа.

Число c_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ называются коэффициентами степенного ряда.

Отметим, что степенной ряд (2) можно привести к виду (1) с помощью подстановки $x - a = X$, поэтому изучение степенных рядов (2) сводится к изучению степенных рядов вида (1).

Изучим структуру области сходимости степенного ряда (1).

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 1 (*Абеля***).** Если степенной ряд (1) сходится при $x = \bar{x} \neq 0$, то он сходится (и притом абсолютно) при любых значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |\bar{x}|$.

Если степенной ряд расходится при $x = \bar{\bar{x}}$, то он расходится и при всех значениях x, для которых $|x| > |\bar{\bar{x}}|$.

В начале отметим, что каждый ряд вида (1) сходится в точке $x = 0$. Однако существуют такие степенные ряды, которые сходятся только в точке $x = 0$, а в остальных точках числовой оси расходятся.

Пример 1. Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

Этот ряд сходится в точке $x = 0$. Однако в любой точке $x \neq 0$ он расходится, в чем нетрудно убедиться с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = +\infty.$$

Существуют также такие степенные ряды, которые сходятся на всей числовой оси.

Пример 2. Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Этот ряд абсолютно сходится на всей числовой оси, в чем легко убедиться с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 \qquad \forall x.$$

Полную ясность о структуре области сходимости степенного ряда дает следующая теорема.

Теорема 2. Для всякого степенного ряда (1) справедливо одно из следующих трех утверждений:

1) ряд расходится всюду, кроме точки $x=0$;

2) ряд абсолютно сходится на всей числовой оси;

3) существует такое число $R>0$, что при $|x|<R$ ряд сходится абсолютно, а при $|x|>R$ ряд расходится.

Определение 2. Число $R>0$, о котором говориться в теореме 2 называется радиусом сходимости степенного ряда (1). Таким образом, радиусом сходимости степенного ряда (1) называется такое число $R>0$, которое обладает тем свойством, что при $|x|<R$ ряд абсолютно сходится, а при $|x|>R$ он расходится.

Интервал $(-R,R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда (1).

Итак, степенной ряд (1) абсолютно сходится в интервале $(-R,R)$, в точках $\pm R$ вопрос о сходимости ряда остается открытым, ряд может сходиться, а может расходиться. В остальных точках числовой оси данный ряд расходится.

Замечание 1. В целях большей общности степенным ряда, сходящимся только в точке $x=0$, а также степенным ряда, абсолютно сходящимся всюду, принято приписывать радиус и интервал сходимости.

В первом случае говорят, что радиус сходимости $R=0$, а интервал сходимости состоит из одной точки $x=0$.

Во втором случае говорят, что радиус сходимости $R=+\infty$, а $(-\infty,+\infty)$ – интервал сходимости.

Итак, вопрос о структуре области сходимости степенного ряда (1) исследован полностью. Область сходимости степенного ряда (1) состоит из одной точки $x=0$ или является одним из следующих промежутков: $(-R,R)$, $[-R,R)$, $(-R,R]$, $[-R,R]$.

Займемся теперь вопросом вычисления радиуса сходимости и интервала сходимости степенного ряда. Поясним это на следующем примере.

Пример 3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^n x^n}{n}$.

Решение. Чтобы определить область сходимости ряда, достаточно найти интервал сходимости ряда и исследовать сходимость числовых рядов, которые получаются из данного ряда при $x=\pm R$.

Применим к исходному ряду признак Даламбера, для чего найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}\cdot x^{n+1}n}{(n+1)\cdot 2^n\cdot x^n}\right|=2|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right|=2|x|.$$

По признаку Даламбера данный ряд абсолютно сходится, если $2|x|<1$, т.е $|x|<\dfrac{1}{2}$, расходится , если $2|x|>1$, т.е. $|x|>\dfrac{1}{2}$.

В соответствии с определением радиуса сходимости, для данного ряда $R=\frac{1}{2}$. Интервалом сходимости является интервал $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Исследуем поведение ряда в точках $x=\pm\frac{1}{2}$.

В точке $x=-\frac{1}{2}$ получаем расходящийся ряд $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. В точке $x=\frac{1}{2}$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Этот ряд сходится условно.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

Замечание 2. Радиус сходимости степенного ряда можно найти и с помощью одной из формул:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \tag{3}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{4}$$

если соответствующий предел существует.

Формулами (3), (4) нельзя пользоваться, если коэффициентов степенного ряда, равных нулю, бесконечное множество.

Пример 4. Найти радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$

Решение. Здесь $c_n=\frac{1}{n^3}$, $c_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^3}$. Найдем радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}=1.$$

Замечание 3. Интервал сходимости ряда (2) имеет вид $(a-R,a+R)$.

§ 2. Равномерная сходимость степенного ряда

Теорема 1. Степенной ряд

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots \tag{1}$$

равномерно сходится на каждом отрезке, лежащем внутри его интервала сходимости $(-R;R)$.

Следствие 1. Сумма степенного ряда непрерывна в каждой точке его интервал сходимости.

Следствие 2. Степенной ряд (1) можно почленно интегрировать на каждом отрезке, лежащем внутри его интервала сходимости, в частности имеет место следующее равенство:

$$\int_0^x S(x)dx = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{c_n x^{n-1}}{n+1} + \ldots, \qquad (2)$$

где x – произвольная точка интервала $(-R;R)$, $S(x)$ – сумма ряда (1).

Теорема 2. Степенной ряд (1) можнодифференцировать почленно в каждой точке его интервала сходимости, т.е. в каждой такой точке сумма ряда $S(x)$ дифференцируема и имеет место следующее равенство:

$$S'(x) = c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots. \qquad (3)$$

Теорема 3. Пусть дан степенной ряд

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots. \qquad (1)$$

Рассмотрим ряды

$$c_1 + 2 \cdot c_2 x + \ldots + n \cdot c_n x^{n-1} + \ldots, \qquad (4)$$

$$c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \ldots + \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \qquad (5)$$

полученные почленным дифференцированием и интегрированием ряда (1).

Ряды (4) и (5) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (1).

ТЕМА 7.4. РЯД ТЕЙЛОРА

§ 1. Разложение функций в степенные ряды

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, например, на интервале $(a-r, a+r)$.

Определение 1. Будем говорить, что на интервале $(a-r, a+r)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots, \qquad (1)$$

если на этом интервале данный ряд сходится, и его сумма равна $f(x)$, т.е. когда

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots, \qquad (2)$$
$$\forall x \in (a-r, a+r).$$

Прежде всего отметим, что если функция $f(x)$ на интервале $(a-r, a+r)$ разлагается в степенной ряд (1), то она дифференцируемая любое число раз на рассматриваемом интервале.

Для таких функций можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если на интервале $(a-r, a+r)$ функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд (1), то есть на этом интервале имеет место равенство (2), то это разложение единственно, причем он имеет вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ldots \ . \qquad (3)$$

Определение 2. Степенной ряд, стоящий в правой части равенства (3), называется рядом Тейлора функции $f(x)$, другими словами рядом Тейлора функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ldots \ . \qquad (4)$$

Если $a = 0$, то этот ряд принимает вид

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ldots \ . \qquad (5)$$

Ряд (5) называется рядом Маклорена.

Используя понятие ряда Тейлора, теорему 1 можно сформулировать так.

Теорема 1'. Если на интервале $(a-r, a+r)$ функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (1), то этот ряд является её рядом Тейлора.

Отметим, что если функция $f(x)$ в точке a любое число раз дифференцируема, то для ее формально можно построить ряд Тейлора. Этот факт записывают так:

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ldots \ .$$

Однако это совсем не свидетельствует о том, что функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора, то есть для данной функции в рассматриваемой окрестности точки a имеет место равенство (3). Может случиться, что ряд Тейлора расходится при всех $x \neq a$. Может случиться также, что он сходится, но не к той функции, которая его породила.

Возникает вопрос: при каких условиях ряд Тейлора сходится, причем к той функции, которая его породила, то есть при каких условиях функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора?

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ на интервале $(a-r, a+r)$ дифференцируема любое число раз. Для того, чтобы на этом интервале данная функция разлагалась в ряд Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in (a-r, a+r)$ выполнялось следующее условие:

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - S_n(x)\right) = 0,$$

где $S_n(x)$ – n-ая частичная сумма ряда Тейлора функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ на интервале $(a-r, a+r)$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно, x– произвольная точка этого интервала. Тогда имеет место следующее равенство:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x), \quad (6)$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt. \quad (7)$$

Равенство (6) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$. Она имеет место для любой точки $x \in (a-r, a+r)$. Величину $R_n(x)$ называют остаточным членом формулы Тейлора. Остаточный член, записанный в виде (7), называют остаточным членом в интегральной форме. Остаточный член $R_n(x)$ можно записать и в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \quad (8)$$

где ξ – некоторая точка отрезка с концами в точках a и x.

Остаточный член формулы Тейлора, записанный в виде (8), называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ на интервале $(a-r, a+r)$ дифференцируема любое число раз. Для того, чтобы на этом интервале данная функция разлагалась в ряд Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in (a-r, a+r)$ выполнялось следующее условие:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора.

Имеет место также следующий достаточный признак разложения функции в ряд Тейлора.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ на интервале $(a-r, a+r)$ имеет производные любого порядка, и все они ограничены на этом интервале одним и тем же числом, то есть

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M \quad \forall x\in(a-r,a+r)$$
$$(n=0,1,2,\ldots),$$

то функция $f(x)$ на интервале $(a-r,a+r)$ разлагается в ряд Тейлора.

§ 2. Вычисление логарифмов

Рассмотрим ряд

$$1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\ldots .$$

При каждом фиксированном x этот ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $-x$. Известно, что он сходится, если $|-x|<1$, т. е. $|x|<1$, расходится, если $|x|\ge 1$. Причем сумма данного ряда равна $\frac{1}{1+x}$.

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\ldots, \qquad -1<x<1.$$

Интервалом сходимости рассмотренного ряда является интервал $(-1,1)$.

Так как степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, лежащем внутри его интервала сходимости, то будем иметь:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

где x – произвольная точка интервала $(-1,1)$.

Это разложение может быть записано в следующем виде:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots, \tag{1}$$
$$-1<x<1.$$

Равенство (1) имеет место в каждой точке $x\in(-1,1)$. Можно доказать, что это равенство имеет место и в точке $x=1$.

Таким образом, равенство (1) имеет место для всех $x\in(-1,1]$.

Разложение (1) в принципе можно использовать для приближенного вычисления значений $\ln(1+x)$, но оно не совсем удобно, так как рассматриваемый ряд сходится медленно. Важно иметь такой ряд, который бы сходился достаточно быстро.

В равенстве (1) заменим x на $-x$. Будем иметь:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots . \tag{2}$$

Это равенство имеет место для всех x, удовлетворяющих условию $-1\le x<1$. Если сейчас из равенства (1) вычесть равенство (2), то получим:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right). \tag{3}$$

Равенство (3) имеет место для всех x, удовлетворяющих условию $-1<x<1$.

В равенство (3) подставим $x=\frac{1}{2n+1}$, где n – натуральное число. Получим:

$$\ln\frac{n+1}{n}=2(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+...),$$

$$\ln(n+1)=\ln n+2(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+...). \tag{4}$$

Отправляясь от $\ln 1=0$, при помощи ряда (4), который сходится достаточно быстро, мы можем найти приближенное значение логарифма натурального любого натурального числа.

Например,

$$\ln 2=2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+...).$$

Сумму этого ряда заменим суммой пяти первых его членов. Получим

приближенное равенство

$$\ln 2\approx 2(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}).$$

Полученная ошибка будет такой:

$$2(\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+...)<2(\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{11\cdot 3^{13}}+...)=$$

$$\frac{2}{11\cdot 3^{11}}(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+...)=\frac{2}{11\cdot 3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{11\cdot 3^9\cdot 8}<0,000002.$$

§ 3. Биномиальный ряд

Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x)=(1+x)^\alpha$, где α – произвольное действительное число.

Сначала для данной функции чисто формально построим ряд Маклорена.

Имеем:

$$f(x)=(1+x)^\alpha, \qquad f(0)=1;$$

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, \qquad f'(0)=\alpha;$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \qquad f''(0)=\alpha(\alpha-1);$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, \quad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot(\alpha-(n-1));$$

. . . .

Ряд Маклорена имеет следующий вид:

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot...\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+.... \tag{1}$$

Этот ряд называется биномиальным рядом.

Если α является целым неотрицательным числом, то все коэффициенты этого ряда, начиная с некоторого, равны нулю. Если α не является целым неотрицательным числом, то все коэффициенты ряда (1) отличны от нуля. Зафиксируем наше внимание на последнем случае.

Рассмотрим случай, когда α не является целым неотрицательным числом.

Найдем интервал сходимости ряда (1). Будем пользоваться признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}n!}{(n+1)!\ \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^n}\right| =$$

$$= |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = |x|.$$

По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится, когда $|x|<1$, расходится, когда $|x|>1$. Отсюда заключаем, что интервалом сходимости ряда (1) является интервал $(-1,1)$.

Из того факта, что ряд (1) сходится на интервале $(-1,1)$, еще не следует, что его сумма равна $(1+x)^\alpha$, т.е. равна той функции, которая его породила. Докажем, что на интервале $(-1,1)$ ряд сходится именно к функции $(1+x)^\alpha$, т.е. докажем, что на этом интервале имеет место следующее равенство:

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\ldots \tag{2}$$

Сумму ряда (1) обозначим через $S(x)$.

$$S(x) = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\ldots, \tag{3}$$

$$x\in(-1,1).$$

Так как степенной ряд можно почленно дифференцировать в каждой

точке его интервала сходимости, то будем иметь

$$S'(x) = \alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\ldots,$$

$$x\in(-1,1).$$

Откуда

$$\frac{S'(x)}{\alpha} = 1+\frac{\alpha-1}{1!}x+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\ldots, \tag{4}$$

$$x\in(-1,1).$$

Равенство (4) умножим на x и прибавим к равенству (4).

Получим:

$$\frac{(1+x)S'(x)}{\alpha} = x+\frac{\alpha-1}{1!}x^2+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3+\ldots +$$

$$+1+\frac{\alpha-1}{1!}x+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{3!}x^3+\ldots.$$

Откуда

$$\frac{(1+x)S'(x)}{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots.$$

Если использовать равенство (3), то из последного равенства получим, что

$$\frac{(1+x)S'(x)}{\alpha} = S(x),$$

откуда

$$(1+x)S'(x)-\alpha S(x)=0. \tag{5}$$

Равенство (5) доказано $\forall x\in(-1,1)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x)=\frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}}, \qquad x\in(-1,1). \tag{6}$$

Докажем, что эта функция во всех точках интервала $(-1,1)$ равна единице. С этой целью найдем производную вспомогательной функции:

$$\varphi'(x)=\frac{(1+x)^{\alpha}S'(x)-\alpha(1+x)^{\alpha-1}S(x)}{(1+x)^{2\alpha}}=$$

$$=\frac{(1+x)S'(x)-\alpha S(x)}{(1+x)^{\alpha+1}},$$

откуда, учитывая равенство (5), получаем, что

$$\varphi'(x)=0 \quad \forall x\in(-1,1).$$

Отсюда следует, что функция $\varphi(x)$ является постоянной на интервале $(-1,1)$. Так как $\varphi(0)=1$, то $\varphi(x)=1 \quad \forall x\in(-1,1)$, т.е.

$$\frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}}=1 \quad \forall x\in(-1,1),$$

$$S(x)=(1+x)^{\alpha} \quad \forall x\in(-1,1).$$

Подставляя выражение для $S(x)$ в равенство (3), получаем равенство (2).

Таким образом, мы доказали, что если α не является целым неотрицательным числом, то для любого $x\in(-1,1)$ имеет место следующее равенство:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots. \tag{2}$$

Если $|x|>1$, то это равенство не имеет место, так как данный ряд расходится. Отметим без доказательства, что при $x=-1$ равенство (2) имеет место, если $\alpha>0$, а при $x=1$ равенство имеет место, если $\alpha>-1$.

§ 4. Различные приемы разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора

1. Непосредственное разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора

Этот прием заключается в следующем:

а) формально составляют ряд Тейлора для функции $f(x)$; с этой целью вычисляют производные всех порядков функции $f(x)$ в точке $x=a$ и подставляют их в разложение (4);

б) находят область сходимости полученного ряда;

в) выясняют, для каких значений x из области сходимости между функцией $f(x)$ и ее рядом Тейлора можно поставить знак равенства.

Пример 1. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=e^x\sin x$.

Решение. Находим производные функции $f(x)$ и их значения в точке $x=0$:

$$f(x)=e^x\sin x,\quad f(0)=0;$$
$$f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$
$$f'(0)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4};$$
$$f''(x)=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),\quad f''(0)=(\sqrt{2})^2\sin\frac{2\pi}{4};$$

....

$$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right),\quad f^{(n)}(0)=(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4};$$

…………………………………………………..

Теперь убедимся, что остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Дя этого оценим его абсолютную величину

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n)}(\xi)x^n}{n!}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{2}\right)^ne^{\xi}\sin\left(\xi+\frac{n\pi}{4}\right)}{n!}x^n\right|<\frac{\left(\sqrt{2}\right)^ne^{|x|}|x|^n}{n!}.$$

Для ряда с общим членом $u_n=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^ne^{|x|}|x|^n}{n!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\left(\sqrt{2}\right)^ne^{|x|}|x|^n}=\frac{\sqrt{2}|x|}{n+1}\to 0<1$$

для всех x, следовательно, ряд сходится (согласно с признаком Даламбера), а его общий член $u_n=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^ne^{|x|}|x|^n}{n!}$ при $n\to\infty$, поэтому и остаточный член $R_n(x)$ стремится к нулю при всех x.

Таким образом, имеем разложение

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\quad(-\infty<x<+\infty).$$

2. Использование табличных разложений

Основными табличными разложениями являются следующие:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\quad(|x|<\infty);\tag{9}$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\quad(|x|<\infty);\tag{10}$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\quad(|x|<\infty);\tag{11}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\quad (|x|<1); \tag{12}$$

$$\begin{gathered}(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=\\ =1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots\quad (|x|<1)\end{gathered} \tag{13}$$

(m – любое действительное число; ряд называется ***биномиальным***);

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\quad (1<x\le 1); \tag{14}$$

$$arctgx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\quad (|x|\le 1). \tag{15}$$

С помощью этих разложений можно достаточно просто найти разложения многих других функций. При этом нет необходимости исследовать остаточные члены соответствующих формул Тейлора с целью выяснения, можно ли между составленным рядом и самой функцией поставить знак равенства, так как области сходимости табличных рядов известны. (Для биномиального ряда (13) указан только интервал сходимости. При $x=-1$ и $x=1$ разложение ведет себя следующим образом: при $m\ge 0$ абсолютно сходится на обоих концах интервала сходимости; при $-1<m<0$ расходится при $x=-1$ и условно сходится при $x=1$; при $m\le -1$ расходится на обоих концах интервала сходимости.)

Пример 2. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=e^{x^2}$.

Решение. Полагаем $x^2=y$ и используем табличное разложение (9).

$$\begin{gathered}e^{x^2}=e^y=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots=\\ =1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}.\end{gathered}$$

Так как разложение в ряд функции e^y имеет место для всех y, то и разложение в ряд данной функции имеет место для всех x.

3. Использование сложения и вычитания рядов и умножения ряда на число

Иногда разложение функции в ряд получается суммированием табличных или ранее найденных рядов, а также при помощи умножения известного ряда на число.

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию $y=shx$.

Решение. Гиперболический синус shx определяется равенством $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Заменив в формуле (9) x на $(-x)$, получим

$$e^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-x)^n}{n!} + \ldots \quad .$$

Таким образом,

$$shx = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) - \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-x)^n}{n!} + \ldots\right)\right] =$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad .$$

Следовательно, $shx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Полученный ряд сходится при всех x, как и ряды функций e^x и e^{-x}.

4. Использование дифференцирования и интегрирования рядов

При разложении функций в ряд Тейлора часто используют почленное дифференцирование и интегрирование рядов.

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = arctg\,\frac{x+3}{x-3}$ и найти радиус сходимости ряда.

Решение. Так как

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2} \cdot \left(-\frac{6}{(x-3)^2}\right) = -\frac{3}{x^2+9} = -\frac{1}{3\left(1 + \frac{x^2}{9}\right)},$$

то из (12) следует, что $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{3^{2n+1}}$. Интегрируя полученный ряд, находим

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}} \int_0^x t^{2n} dt,\; f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

где $f(0) = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Радиус сходимости полученного ряда равен 3.

5. Использование умножения рядов

Если функция $f(x)$ представляет собой произведение двух функций, то ее разложение в ряд может быть найден умножением рядов, в которые предварительно раскладываются функции, являющиеся множителями.

Пример 5. Разложить в ряд по степеням x функцию $\frac{e^x}{1-x}$.

Решение. Если представить функцию в виде произведения двух функций, разложить каждую из них в ряд и осуществить их умножение, получим

$$\frac{e^x}{1-x}=e^x\cdot\frac{1}{1-x}=$$

$$=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+\ldots\right)=$$

$$=1+\left(x\cdot 1+1\cdot x\right)+\left(1\cdot x^2+x^2+\frac{x^2}{2!}\cdot 1\right)+\left(1\cdot x^3+x^3+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)+$$

$$+\left(1\cdot x^4+x^4+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)+\ldots+\left(1\cdot x^n+x^n+\frac{x^n}{2!}+\frac{x^n}{3!}+\ldots++\frac{x^n}{n!}\right)+\ldots=$$

$$=1+2x+\left(2+\frac{1}{2!}\right)x^2+\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)x^3+\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)x^4+\ldots+$$

$$+\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)x^n+\ldots\quad .$$

Разложение имеет место для $-1<x<1$.

§ 5. Приложения рядов

1. Применение рядов к вычислению пределов, производных и интегралов

При вычислении пределов дробей, числители и знаменатели которых стремятся к нулю, используют разнообразные приемы: используют табличные формулы, эквивалентные бесконечно малые и правило Лопиталя. Существует еще один весьма эффективный способ вычисления пределов отношений, основанный на использовании степенных рядов.

Этот метод заключается в следующем. Числитель и знаменатель дроби разлагают в степенные ряды (по степеням одной и той же разности $x-a$) После этого совершают необходимые сокращения, после чего неопределенность обычно пропадает.

Пример 1. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(tgx-\sin x\right)-x^3}{x^5}.$$

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{2\left(tgx-\sin x\right)-x^3}{x^5}=\frac{2\sin x-2\sin x\cos x-x^3\cos x}{x^5\cos x}=\frac{2\sin x-\sin 2x-x^3\cos x}{x^5\cos x}.$$

Запишем разложения полученных функций в степенные ряды в окрестности точки $x=0$:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,$$

$$\sin 2x=2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^5x^5}{5!}-\frac{2^7x^7}{7!}+\ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \ .$$

Подставляя полученные разложения в данное выражение, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x - \sin 2x - x^3\cos x}{x^5\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(2x-\frac{2x^3}{6}+\frac{2x^5}{120}-\frac{2x^7}{5040}+\dots\right)-\left(2x-\frac{8x^3}{6}+\frac{32x^5}{120}-\frac{128x^7}{5040}+\dots\right)-\left(x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{24}-\frac{x^9}{720}+\dots\right)}{x^5-\frac{x^7}{2!}+\frac{x^9}{4!}-\dots} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^5-\frac{1}{60}x^7+\dots}{x^5-\frac{x^7}{2!}+\frac{x^9}{4!}-\dots} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{60}x^2+\dots}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots} = \frac{1}{4}.$$

С помощью рядов Тейлора можно находить числовые значения производных любого порядка от данной функции. В частности, чтобы найти $f^{(n)}(a)$, необходимо разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x-a$, а затем по формуле $f^{(n)}(a)=c_n n!$ вычислить необходимую производную (указанная формула получается из общего выражения $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ для коэффициентов ряда Тейлора).

Пример 2. Найти производную 10-го порядка от функции $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ в точке $x=0$.

Решение. Разложим данную функцию в ряд Тейлора по степеням x:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1+\frac{-\frac{x^2}{2}}{1!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^4}{4!}+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^5}{5!}+\dots=$$

$$=1-\frac{x^2}{2\cdot 1!}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\frac{x^8}{2^4\cdot 4!}-\frac{x^{10}}{2^5\cdot 5!}+\dots \ .$$

Так как $f^{(10)}(0)=c_{10}\cdot 10!$,

то

$$f^{(10)}(0) = -\frac{10!}{2^5\cdot 5!} = -\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2^5} = -3\cdot 5\cdot 7\cdot 9 = -945.$$

Теорию рядов можно использовать и при интегрировании функций. Если функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд, то интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, где $a\le x_1<x_2\le b$, часто также легко представляется в виде сходящегося ряда.

Пример 3. Представить в виде ряда интеграл

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx .$$

Решение. Найдем разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора по степеням x:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n} .$$

Отрезок $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ полность принадлежит интервалу сходимости полученного ряда, поэтому ряд на нем сходится равномерно, а следовательно, его можно почленно интегрировать на этом отрезке.

Проинтегрировав, получаем

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x^n}{n^2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n-1}{n^2\cdot 4^n} .$$

Таким образом, сумма найденного ряда дает точное значение исходного интеграла.

2. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов

Интегрирование многих дифференциальных уравнений не приводит к квадратурам, а их решения не выражаются через элементарные функции.

Если проинтегрировать дифференциальное уравнение с помощью элементарных функций нельзя, то его решение в некоторых случаях можно искать в виде степенного ряда.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n . \tag{1}$$

Неопределенные коэффициенты c_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ находят путем подстановки ряда (1) в уравнение и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях $x - x_0$ в левой и правой частях полученного равенства. В результате, эти равенства вместе с начальными условиями образуют систему, из которой $c_0, c_1, c_2, \ldots$последовательно определяются. Как правило, этот процесс останавливают на каком-нибудь шаге и получают тем самым приближенное решение

$$y = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \ldots + c_n(x-x_0)^n .$$

Можно также искать решение уравнения

$$y' = f(x,y), \text{ где } y(x_0) = y_0 , \tag{2}$$

в виде ряда Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n , \tag{3}$$

где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, и следующие производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n=2,3,\ldots)$ последовательно находятся с помощью дифференцирования уравнения (2) и подстановки вместо x числа x_0.

Пример 4. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'=y \tag{4}$$

при начальном условии $y(0)=1$.

Решение. Решение дифференциального уравнения (4) ищем в виде ряда

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3\ldots \quad .$$

Из начального условия следует $c_0=y(0)=1$. Подстановка в данное дифференциальное уравнение дает

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots \quad .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{c|c} x^0 & c_0=c_1 \\ x^1 & c_1=2c_2 \\ x^2 & c_2=3c_3 \\ x^3 & c_3=4c_4 \\ x^4 & c_4=5c_5 \\ \ldots & \ldots\ldots \\ x^n & c_n=(n+1)c_{n+1} \\ \ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{5}$$

Решив систему (5), будем иметь:

$$c_1=1, c_2=\frac{1}{1\cdot 2}, c_3=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\ldots,c_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n},\ldots \quad .$$

Таким образом, $y=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots=e^x$.

Отметим, что в большинстве случаев решение дифференциального уравнения получается в виде ряда, сумма которого не является элементарной функцией.

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'=x+y;\ y_0=y(0)=1. \tag{6}$$

Решение. Полагаем

$$y=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots \quad .$$

Имеем $y(0)=1$, $y'(0)=0+1=1$. Дифференцируя обе части равенства (6), последовательно находим $y''=1+y'$, $y''(0)=1+1=2$, $y'''=y''$, $y'''(0)=2$, и т.д.

Таким образом,

$$y=1+x+\frac{2}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\ldots \quad .$$

Для рассматриваемого примера найденное решение можно записать в конечном виде $y=1+x+2\left(e^x-1-x\right)$ или $y=2e^x-1-x$.

3. Приближенные вычисления при помощи рядов

Ряды представляют собой аппарат, удобный для приближенных вычислений. Рассмотрим несколько примеров приближенных вычислений при помощи рядов.

Прыклад 6. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Используем биномиальный ряд:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$

который, как известно, сходится при $-1<x<1$.

Представим сейчас данный корень в виде

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{125+5}=5\sqrt[3]{1+\frac{5}{125}}=5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{3}.$$

Для функции $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ получаем следующее разложение:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{3}x-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4+\ldots\quad .$$

Если вместо x подставить число $\frac{1}{25}$, получим числовой ряд:

$$\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3\cdot 5^2}-\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 5^4}+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}-\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!\cdot 5^8}+\ldots\quad .$$

Мы имеем знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница, поэтому если возьмем в качестве приближенного значения суммы этого ряда сумму n первых его членов, то будем иметь погрешность, меньшую чем первый отбрасываемый член.

Так как мы должны вычислить значение корня с точностью до 0,0001, то для подсчета необходимо взять первые три члена ряда. Действительно, уже четвертый член, умноженный на пять, будет

$$\frac{5\cdot 1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!\cdot 5^6}=\frac{1\cdot 2}{27\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5^4}=\frac{1}{81\cdot 625}<0{,}0001.$$

Осуществим вычисления (умножим каждый член ряда на 5):

$$5{,}00000+0{,}06667-0{,}00089=5{,}06578.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{130}\approx 5{,}0658$ (с точностью до 0,0001).

Пример 7. С точностью до 0,00001 вычислить $\sin 1$.

Решение. В формуле

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

полагаем $x = 1$. Тогда

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \ldots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{362880} - \ldots \quad .$$

Полученный ряд является рядом Лейбница. Поэтому погрешность при замене его суммы суммой первых n членов не превысит первого отбрасываемого члена. Так как $\dfrac{1}{362880} < 0{,}000003$ (<0,00001), достаточно взять сумму первых четырех членов, чтобы получить искомое значение с заданной точностью.

Таким образом, $\sin 1 \approx 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{120} - \dfrac{1}{5040} \approx 0{,}84147$.

Пример 8. Вычислить с точностью до 10^{-4} интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$.

Решение. Разложение подынтегральной функции в степенной ряд имеет вид

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

Интегрируя этот ряд почленно, получаем:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{(2n+1)4^{2n+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!5\cdot 4^5} - \ldots \quad .$$

Полученный числовой ряд есть ряд Лейбница. Погрешность Δ, получаемая при отбрасывании всех членов, начиная с третьего, будет по абсолютной величине меньше третьего члена:

$$|\Delta| < \frac{1}{2!5\cdot 4^5} < 10^{-4}.$$

Таким образом, с точностью до 0,0001, имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4^3} \approx 0{,}2448.$$

II. ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

РАЗДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 1. Понятие функции. Область определения. Классификация функций

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Найти $f(2x), 2f(x), f(x^2), \left(f(x)\right)^2$.

2. Дана функция $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$. Показать, что при $x_1, x_2 \in (-1;1)$ имеет место тождество $f(x_1)+f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$.

3. Пусть $f(x)=\begin{cases} 3^x, -1<x<0, \\ 4, 0\le x<1, \\ 3x-1, 1\le x\le 3. \end{cases}$ Найти $f(2), f(0), f(-0{,}5), f(3)$.

4. Найти области определения функций:

1) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$; 4) $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$; 5) $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$;

6) $f(x)=\log_x 5$; 7) $f(x)=\lg\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}$;

8) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-2}{2}-\lg(4-x)$; 9) $f(x)=\arccos\dfrac{3}{4+2\sin x}$;

10) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

5. Найти области определения функций:

1) $f(x)=\sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$; 2) $f(x)=\log_2\log_3\log_4 x$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}+2^{\arcsin x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$; 4) $f(x)=\lg\left|4-x^2\right|$.

6. Найти множества значений функций: 1) $y=\dfrac{1}{2-\cos 3x}$; 2) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

7. Определить, какая из данных функций является четной, нечетной и какая из них не является ни четной, ни нечетной функцией.

1) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$; 2) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$; 3) $f(x)=2x^3-x+1$;

4) $f(x)=x\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$; 5) $f(x)=4-2x^4+\sin^2 x$; 6) $f(x)=\dfrac{1+a^{kx}}{1-a^{kx}}$;

7) $f(x)=const$.

8. Найти период функции:

1) $f(x)=5\sin 4x$; 2) $f(x)=4\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 3) $f(x)=tg2x$.

9. Показать, что функция $f(x)=x^3+3x+5$ возрастает во всей области ее определения.

10. Показать, что функция $g(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ убывает в промежутке $(1,+\infty)$.

11 Найти наименьшее значение функции $y=3x^2+5x-1$.

12. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=\sin x+\cos x$.

13. Найти функцию, обратную функции $y=3x+5$.

§ 2. Числовая последовательность и ее предел

1. Дан общий член последовательности (x_n): $x_n=\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n}$. Написать пять первых членов этой последовательности.

2. Найти несколько первых членов последовательности, если общий член задается формулой

а) $x_n=\sin\dfrac{n\pi}{3}$; б) $x_n=2^{-n}\cos n\pi$; в) $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

3. Зная несколько первых членов последовательности, написать одно из возможных выражений для общего члена:

а) $\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{8},\ \dfrac{10}{13},\ \dfrac{17}{18},\ \dfrac{26}{23}$; б) $1,\ \dfrac{1}{2},\ 2,\ \dfrac{1}{3},\ 3,\ \dfrac{1}{4},\ 4,\ \dfrac{1}{5}$.

4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}=1$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}=\dfrac{3}{5}$. Начиная с какого n выполняется неравенство $\left|x_n-\dfrac{3}{5}\right|<0{,}01$?

5. Дана последовательность $\left(\dfrac{3n-5}{9n+4}\right)$. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{3}$. Найти число точек x_n, лежащих вне интервала $\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1000};\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1000}\right)$.

6. Вычислить пределы последовательностей:

6.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}$; 6.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2}{1-4n^2}$; 6.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-3n^2+n+1}{3n^2-4n+5}$;

6.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{2n}{3n+1}\right)$; 6.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2+n-4}{n^5+4n^4-3n^2+1}$;

6.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+2}-\sqrt{n^2-4n+3}\right)$; 6.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-n}{\sqrt{n+1}+n}$;

6.8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{1-n^3}+n)$; 6.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$; 6.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+\sqrt{n}}$;

6.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$; 6.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2nn!-3(n-1)!}{(n+1)!-4n!}$;

6.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+n^2(n-2)!}{2n!-(n-1)!}$; 6.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

6.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$; 6.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+2n^2+1}{4n^3+7n^2+3n+4}\right)^4$;

6.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$; 6.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3}{2n^2+3}+\dfrac{1-5n^2}{5n+1}\right)$;

6.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)$; 6.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\cos n^3-\dfrac{3n}{6n+1}\right)$;

6.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}}$.

Найти пределы последовательностей.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$. 8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right)$. 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$. 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$. 14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$. 15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+7}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$.

§ 3. Предел функции одной переменной. Замечательные пределы

Вычислите указанные пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+4x+4)$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+7x^2+x}{9x}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. 5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. 6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$. 7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$.

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$. 10 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{x-1}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-\sqrt{1+3x}}{x}$. 12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$.

13. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^4+2x^5+1}{x^5+8x^3+x}$. 14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+2x+1}{1000x^3+2x+5}$. 15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x+5}{x^4+3x+7}$.

16. $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$. 17. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$. 18. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{8x}$. 20. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$. 21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}$. 22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg7x}{\sin 9x}$. 24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{tg^2 6x}$. 25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$. 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\arcsin 2x}$.

Вычислите следующие пределы функций.

27. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$. 28. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1000x}{x^2-1}$. 29. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

30. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$. 31. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. 32. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

33. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$. 34. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$. 35. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

36. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. 37. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$. 38. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$. 39. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

40. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$. 41. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

42. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$. 43. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}$. 44. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. 46. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. 47. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

48. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$. 49. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$. 50. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

51. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$. 52. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{x}$. 53. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$.

54. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$. 55. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$. 56. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

57. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$. 58. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. 59. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}$.

60. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$. 61. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{\sin 3x}$. 62. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$. 63. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

§ 4. Непрерывные функции. Эквивалентные функции и их применение к вычислению пределов функций

1. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва, в случае устранимого разрыва доопределите до непрерывной функцию $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

2. Исследуйте на непрерывность и найдите точки разрыва функции

$$y=\frac{x}{x^2-9}.$$

3. Исследуйте на непрерывность и найдите точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}x-1, \text{\textit{если}}\ x\neq -1,\\ 1, \text{\textit{если}}\ x=-1.\end{cases}$$

Найдите точки разрыва, если они существуют. Определите скачки функций в точках, где имеются разрывы первого рода.

4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(2x^2+3), \text{\textit{при}} -\infty<x\le 1,\\ 6-5x, \text{\textit{при}}\ 1<x<3,\\ x-3, \text{\textit{при}}\ 3\le x<+\infty.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}-2x^2, \text{\textit{если}}\ x\le 3,\\ 3x, \text{\textit{если}}\ x>3.\end{cases}$

6. $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$.

7. Исследуйте на непрерывность и найдите точки разрыва функций:

а) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$; б) $y=e^{\frac{1}{x+1}}$; в) $y=arctg\dfrac{1}{x}$.

8. Исследуйте на непрерывность функции.

1) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$; 2) $y=\dfrac{x}{|x|}$; 3) $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$; 4) $f(x)=\begin{cases} x^2, при\ x\le 3, \\ 2x+1, при\ x>3. \end{cases}$

Используя метод замены бесконечно малых функций эквивалентными, найдите пределы.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg7x}{\sin 9x}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\arcsin 2x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{tg\frac{x}{3}}$. 13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7\sin x)}{arctg\frac{x}{2}}$.

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Определение производной. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование

1. Найдите приращение функции $y=x^2$, соответствующее переходу аргумента: а) от $x=1$ до $x_1=2$; б) от $x=1$ до $x_1=1{,}1$; в) от $x=1$ до $x_1=1+h$.

2. Найдите Δy для функции $y=\sqrt[3]{x}$, если: а) $x=0$, $\Delta x=0{,}001$; б) $x=8$, $\Delta x=-9$; в) $x=a$, $\Delta x=h$.

3. Найдите Δy и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, соответствующие изменению аргумента от x до $x+\Delta x$ для функций: а) $y=ax+b$; б) $y=x^3$, в) $y=\dfrac{1}{x^2}$.

4. Найдите производные следующих функций, пользуясь непосредственно определением производной: а) $y=5x$; б) $y=12-x^3$; в) $y=(3x+5)^2$; г) $y=\sqrt{4x+5}$; д) $y=\sqrt{3+x^2}$.

Найдите производные следующих функций:

5. $y=1-2x^2$. 6. $y=\dfrac{x+2}{x}$. 7. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

8. $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+5$. 9. $y=x^2(2x-1)$. 10. $y=\dfrac{x^3-3}{5-x^2}$.

11. $y=5\sin x+6\cos x$. 12. $y=tgx-ctgx$. 13. $y=x\arcsin x$.

14. $y=x^7e^x$. 15. $y=\dfrac{arctgx}{x^3}$. 16. $y=x^3ctgx$.

17. $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$. 18. $y=\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$. 19. $y=\dfrac{\pi}{x}+\ln 2$.

20. $y=2t\sin t-(t^2-2)\cos t$. 21. $y=\sqrt{x^2+3x+1}$.

22. $y=e^{\arcsin x}$. 23. $y=2^{\sqrt{x^2+3x+4}}$. 24. $y=\sin^3(x^2+3x+1)$.

25. $y=e^{\sqrt{x}}$. 26. $y=\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$. 27. $y=3^{tg^4(x^2+5x)}$.

28. $y=tgx-\dfrac{1}{3}tg^3x+\dfrac{1}{5}tg^5x$. 29. $y=\ln\cos\dfrac{x-1}{x}$.

30. $y=\sin^5 2x$. 31. $y=(x^2-4x+8)e^{\frac{x}{2}}$. 32. $y=\ln(e^{-x}+xe^{-x})$.

33. $y=(\arcsin\sqrt{x})^4$. 34. $y=\ln arctg\sqrt{x}$. 35. $y=\sin^3(x^2+3x+1)$.

36. $y=arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 37. $y=\sin^3 5x\cos^2\dfrac{x}{3}$. 38. $y=\dfrac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1+tgx}}$.

39. $y=(\sin x)^x$. 40. $y=(ctgx)^{x^3}$. 41. $y=x^{x^2}$.

42. $y=x^{\sin x}$. 43. $y=(1+x^2)^{\arccos x}$. 44. $y=\sqrt[x]{arctgx}$.

§ 2. Численное значение производной. Геометрическое и механическое истолкование производной

1. Найти $f'(1)$, если $f(x)=x^3-5x^2+8x+2$.

2. Найти $f'(3)$, если $f(x)=\sqrt{x^2+3x-9}$.

3. Найти $f'(2)$, если $f(x)=\ln(1+2^x)$.

4. Найти $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $f(x)=2\sin x+3\cos x$.

5. На кривой $y=x^2-2x+5$ найдите точку, ордината которой возрастает в четыре раза быстрее, чем абсцисса.

6. $f(x)=3x^5-5x^3+5x-7$. Выясните, в какой из точек x скорость изменения функции наименьшая?

7. Тело массой 6 *г* движется прямолинейно по закону $s=-1+\ln(t+1)+(t+1)^3$ (s выражено в сантиметрах, t – в секундах). Требуется вычислить кинетическую энергию через 1 *г* после начала движения.

8. При каком значении x ордината кривой $y=\dfrac{x^2}{2}$ будет возрастать в четыре раза быстрее, чем ордината кривой $y=\ln x$.

9. Найдите уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3+2x$ в точке $M(1;3)$.

10. Найдите уравнения касательной к кривой $y=x^2+5x-1$ в точке $M(1;5)$.

11. Найдите уравнение нормали к кривой $y=x^3+2$ в точке $M(1;3)$.

12. Под каким углом парабола $y=x^2-x$ пересекает ось абсцисс?

13. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 7x + 3$ параллельна прямой $5x + y - 3 = 0$?

14. Под какими углами синусоиды $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$ пересекают ось абсцисс в начале координат.

§ 3. Дифференциал функции и его применение в приближенных вычислениях

Найдите дифференциалы следующих функций.

1. $y = \sin^2 x$. 2. $y = e^{x^2}$. 3. $y = \dfrac{x^3 - 3}{5 - x^2}$. 4. $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$. 5. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$. 6. $y = e^{\sqrt{x}}$. 7. $y = \ln^2 x$. 8. $y = (\arcsin x)^5$. 9. $y = (1 + tgx)^8$.

10. Определите, на сколько увеличилось ребро куба, если объём его изменился с 27 м^3 до 27,2 м^3.

11. Найдите приближённое значение $(2{,}01)^3$.

12. Найдите приближённое значение:

а) $\sqrt[4]{17}$; б) $\sqrt{8{,}76}$; в) $\ln 0{,}9$; г) $\sin 29^\circ$; д) $3{,}002^4$.

13. Расход бензина y (л) автомобиля на 100 км пути в зависимости от скорости x (км/ч) описывается функцией $y = 18 - 0{,}3x + 0{,}003x^2$. Оценить относительную погрешность вычисления расхода бензина при скорости $x = 90$ км/ч, определённой с точностью до 5 %.

14. Используя понятие дифференциала, определите, на сколько процентов изменится величина степени $2{,}1^{3{,}1}$ при изменении основания степени на 5 %.

15. Насколько приблизительно изменится сторона квадрата, если площадь его увеличилась от $9\,м^2$ до $9{,}1\,м^2$?

16. Насколько приблизительно увеличится объем шара, если его радиус $R = 15\,см$ удлинится на $2\,мм$?

17. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

а) $\sin 31^\circ$; б) $e^{0{,}2}$; в) $\lg 0{,}9$; г) $\sqrt[5]{33}$.

§ 4. Производные высших порядков. Формула Лейбница. Дифференциалы высших порядков

Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

1. $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$. 2. $y = e^{x^2}$. 3. $y = \sin^2 x$.

4. $y = \ln(2x - 3)$. 5. $y = \sqrt{1 + x^2}$. 6. $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$.

7. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$. 8. $f(x) = (1 + x^2)arctgx$.

9. $y = (\arcsin x)^2$.

10. $y = x\ln x$, найти y'''. 11. $y = e^x \cos x$, найти y'''.

12. Показать, что функция $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $1 + y'^2 = 2yy''$.

13. Показать, что функция $y = \dfrac{1}{2}x^2 e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 2y' + y = e^x$.

14. Найти $f'''(3)$, если $f(x) = (2x-3)^5$.

15. Уравнение движения точки по оси Ox есть $x = 100 + 5t - 0{,}001t^3$. Найти скорость и ускорение точки для моментов времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$.

16. Найти производные n-го порядка от следующих функций:

а) $y = \ln x$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sin 5x \cos 2x$; г) $y = \ln(x^2 + x - 2)$.

17. Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков для функций:

1) $y = x^2 \sin x$; найти $y^{(25)}$; 2) $y = e^x (x^2 - 1)$; найти $y^{(24)}$;

3) $y = xe^x$; найти $y^{(n)}$.

18. Вычислить $d^2 y$, если $y = \cos 5x$.

19. $u = \sqrt{1 - x^2}$, найти $d^2 u$.

20. $y = \arccos x$, найти $d^2 y$.

21. $z = \dfrac{\ln x}{x}$, найти $d^2 z$.

22. $z = x^2 e^{-x}$, найти $d^3 z$.

§ 5. Дифференцирование параметрически заданных функций. Дифференцирование функций, заданных неявно

Определить производную $y' = \dfrac{dy}{dx}$ для функций y, заданных параметрически:

1. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

8. Вычислить $\dfrac{dy}{dx}$ при $t = \dfrac{\pi}{2}$, если $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

9. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ при $t = 1$, если $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$

10. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от следующих функций:

а) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = \ln(1 + t^2); \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Найти производную $y' = \dfrac{dy}{dx}$ от неявных функций y:

11. $2x - 5y + 10 = 0$.

12. $x^3 + y^3 = a^3$.

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

14. $tgy = xy$.

15. $arctg(x + y) = x$.

16. $e^y = x + y$.

17. $x^3y^2 + 5xy + 4 = 0$.

18. $arctgy - y + x = 0$.

19. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

20. Найти y' в точке $M(1;1)$, если $2y = 1 + xy^3$.

§ 6. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей

Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$.

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$.

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - x}{\sin x - x}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x^2+x-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tgx$.

13. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)ctgx$.

15. $\lim\limits_{x\to0+0}x^{tgx}$.

16. $\lim\limits_{x\to0+0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

17. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{ctg^2x}$.

18. $\lim\limits_{x\to0+0}x^x$.

19. $\lim\limits_{x\to0+0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{\arcsin 5x}$.

§ 7. Экстремумы функции одной переменной

Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций.

1. $y=3x-x^3$.
2. $y=\dfrac{2}{3}x^3-2x+1$.
3. $y=3x+\dfrac{3}{x}+5$.
4. $y=x^2(x-3)$.
5. $y=(x+4)^3$.
6. $y=\dfrac{x}{x-2}$.
7. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.
8. $y=\dfrac{x}{x^2-6x-16}$.
9. $y=\dfrac{x}{3}-\sqrt[3]{x}$.
10. $y=x\ln x$.
11. $y=2e^{x^2-4x}$.
12. $f(x)=2x^3-9x^2-24x+7$.

Исследуйте на экстремум следующие функции.

13. $y=x^2-2x+3$.
14. $y=x^3-9x^2+15x+3$.
15. $y=x^4-8x^2+2$.
16. $y=\dfrac{(x-2)(3-x)}{x^2}$.
17. $y=\dfrac{x}{x^2+4}$.
18. $y=x^3e^{-x}$.
19. $y=\dfrac{e^x}{(x+3)^2}$.
20. $y=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$.
21. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.
22. $y=x-\ln(1+x)$.

Найдите наименьшее и наибольшее значения следующих функций.

23. $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ на отрезке $\left[-2;\dfrac{5}{2}\right]$.
24. $y=2x^3-3x^2-12x+10$ на отрезке $[-3;3]$.
25. $y=x^3-3x^2+3x$ на отрезке $[-1;2]$.

26. $f(x)=x^2\ln x$ на отрезке $[1;e]$.

27. $y=x\ln x$ на отрезке $[1;e]$.

28. Докажите неравенство $e^x>1+x$ при $x\neq 0$.

29. Докажите неравенство $x^{\alpha}-1>\alpha(x-1)$ при $\alpha\geq 2$, $x>1$.

Докажите неравенства:

30. $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$ при $x>0$.

31. $\cos>1-\dfrac{x^2}{2}$ при $x\neq 0$.

32. Докажите, что

1) $x_1^{\frac{1}{x_1}}<x_2^{\frac{1}{x_2}}$ и $x_1^{x_2}<x_2^{x_1}$, если $0<x_1<x_2\leq e$;

2) $x_1^{\frac{1}{x_1}}>x_2^{\frac{1}{x_2}}$ и $x_1^{x_2}>x_2^{x_1}$, если $e\leq x_1<x_2$.

33. Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью $S(x)=ax+\lambda x^3$ ($a<p,\lambda>0$). Найдите оптимальный для производителя объём выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.

34. Данное положительное число m разложите на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

35. Из куска проволоки длиной 30 *см* требуется согнуть прямоугольник наибольшей площади. Каковы размеры этого прямоугольника?

36. Определить размеры цилиндра объёмом 10 $см^2$, имеющего наименьшую полную поверхность.

37. Найти число, которое, будучи сложено со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

38. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

39. В данный шар вписать цилиндр с наибольшим объемом.

40. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

§ 8. Выпуклость и точки перегиба

Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых.

1. $y=x^5$.
2. $y=x^3-6x^2+12x+4$.
3. $y=(x+1)^4$.
4. $y=\dfrac{1}{x+3}$.
5. $y=\dfrac{1}{x+3}$.
6. $y=\dfrac{x^3}{x^2+12}$.
7. $y=\sqrt[3]{x-1}$.
8. $y=-x^3+15x^2-x-250$.
9. $y=x-\sin x$.

10. $y = e^{-x^2}$. 11. $f(x) = x^6 - 6x^5 + \left(\dfrac{15}{2}\right)x^4 + 3x$.

11. Найдите точки перегиба кривой $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$.

§ 9. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функций и построения их графиков

Найдите асимптоты следующих кривых.

1. $y = \dfrac{5x}{x-3}$. 2. $y = \dfrac{3x}{x-1} + 3x$.

3. $y = \dfrac{2}{x^2-4}$. 4. $y = \dfrac{2x^2 + x + 3}{x+6}$.

5. $y = x + e^{-x}$. 6. $y = x\,arctgx$.

Исследуйте следующие функции и постройте их графики.

7. $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$. 8. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

9. $y = e^{\frac{1}{x+2}}$. 10. $y = \ln(1 - x^2)$.

11. $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$. 12. $y = x^3 - 4x^2 + 3x$.

13. $y = x + \dfrac{1}{x}$. 14. $y = x^2 e^{-x}$.

15. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$. 16. $y = \dfrac{3x-2}{5x^2}$.

РАЗДЕЛ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Непосредственное интегрирование

Найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int \dfrac{dx}{x^3}$. 2. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$. 3. $\int \dfrac{x^2 \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$.

4. $\int \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x}\,dx$. 5. $\int \dfrac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{\sqrt{x}}\,dx$. 6. $\int \left(2 - t^2\right)^2 \sqrt{t}\,dt$.

7. $\int \dfrac{x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

8. $\int \dfrac{\left(1 + \sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\,dx$. 9. $\int \dfrac{x-9}{\sqrt{x}+3}\,dx$. 10. $\int 5^x\,dx$.

11. $\int 3^x e^x dx.$ 12. $\int 5^{x-2} dx.$ 13. $\int \frac{32^x - 2^x}{4^x} dx.$

14. $\int a^x \left(2 + \frac{a^{-x}}{x^4}\right) dx.$ 15. $\int \frac{dx}{x^2 + 3}.$ 16. $\int \frac{dx}{x^2 - 5}.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$ 18. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$ 19. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$

20. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx.$ 21. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx.$

22. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx.$ 23. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$ 24. $\int \left(\frac{2}{1 + x^2} - \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx.$

25. $\int \frac{x^4 dx}{1 + x^2}.$ 26. $\int \cos 2x dx.$

27. $\int 2x\left(x^2 + 5\right)^7 dx.$ 28. $\int 2x\sqrt{x^2 + 6} dx.$ 29. $\int \sqrt{a^2 - x^2} x dx.$

30. $\int e^{3x} dx.$ 31. $\int (x + 5)^3 dx.$ 32. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

33. $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}.$ 34. $\int \operatorname{tg} x dx.$ 35. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$

36. $\int \frac{\ln x}{x} dx.$ 37. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx.$ 38. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5 + \cos x}} dx.$

39. $\int \frac{dx}{a + bx}.$ 40. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$

2. Метод подстановки

Применяя указанные подстановки, найти интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2}}, \quad x = \frac{1}{t}.$ 2. $\int x\left(5x^2 - 3\right)^7 dx, \quad 5x^2 - 3 = t.$

3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x + 1}}, \quad t = \sqrt{x + 1}.$ 4. $\int x\sqrt{x - 5} dx, \quad t = \sqrt{x - 5}.$

5. $\int \frac{dx}{1 + e^x}, \quad 1 + e^x = t.$

Применяя подходящие подстановки, найти интегралы.

6. $\int \left(9 + 7x^2\right)^5 x dx.$ 7. $\int e^{x + x^2} (1 + 2x) dx.$

8. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{6 - \sin^2 x}}.$ 9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x + 1}}.$

10. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$ 11. $\int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} dx.$

12. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$ *Указание*: подстановка $x=a\sin t$.

13. $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$ *Указание*: подстановка $x=a\sin t$.

14. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1}.$

15. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx.$

16. $\int\frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

17. $\int\cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx.$

18. $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

3. Интегрирование по частям

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы.

1. $\int\ln x\,dx.$
2. $\int xe^x dx.$
3. $\int\arcsin x\,dx.$
4. $\int x\ln x\,dx.$
5. $\int x\arcsin x\,dx.$
6. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$
7. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx.$
8. $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx.$
9. $\int x^2e^x dx.$
10. $\int x\ln\left(x^2-1\right)dx.$
11. $\int\arccos 2x\,dx.$
12. $\int x^3\ln x\,dx.$
13. $\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$
14. $\int(\arcsin x)^2 dx.$
15. $\int e^{2x}\sin 2x\,dx.$
16. $\int 3^x\cos x\,dx.$
17. $\int\sin(\ln x)dx.$

4. Интегрирование рациональных функций

Вычислить неопределенные интегралы.

1. $\int\frac{dx}{x-7}.$
2. $\int\frac{dx}{1+5x}.$
3. $\int\frac{dx}{(3x+2)^2}.$
4. $\int\frac{dx}{(4-5x)^3}.$
5. $\int\frac{x\,dx}{x^2+7x+13}.$
6. $\int\frac{4x+8}{3x^2+2x+5}dx.$
7. $\int\frac{5x-7}{8x^2+x+1}dx.$
8. $\int\frac{3x+2}{\left(x^2-3x+3\right)^2}dx.$
9. $\int\frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx.$
10. $\int\frac{4x+11}{(x-1)(2x+3)}dx.$

11. $\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx.$

12. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx.$

13. $\int \frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)}dx.$

14. $\int \frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}dx.$

15. $\int \frac{30x^5+90x^4+165x^3+341x^2+271x+30}{x^3+3x^2+2x}dx.$

16. $\int \frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}dx.$

17. $\int \frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx.$

18. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)^3}.$

19. $\int \frac{dx}{1-x^4}.$

20. $\int \frac{dx}{1-x^3}.$

21. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$

22. $\int \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}dx.$

5. Интегрирование некоторых тригонометрических и иррациональных выражений

Найти следующие неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$

2. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}.$

3. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}.$

4. $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}.$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x-3}dx.$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}.$

8. $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$

9. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx.$

10. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}.$

11. $\int \cos^5 x dx.$

12. $\int \sin^7 x dx.$

13. $\int \sin^2 x dx.$

14. $\int \cos^4 x dx.$

15. $\int \sin^6 x dx.$

16. $\int \sin^2 x\cos^3 x dx.$

17. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}.$

18. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}.$

19. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx.$

20. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}.$

21. $\int \sin 4x\sin 6x dx.$

22. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}dx.$

23. $\int \cos 3x\cos 9x dx.$

24. $\int \sin x\cos 2x\cos 3x dx.$

25. $\int \cos x \cos 2x \cos 5x dx$.

Найти интегралы:

26. $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$.

27. $\int \frac{(2x-3)^{1/2}dx}{(2x-3)^{1/3}+1}$.

28. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

29. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

30. $\int \frac{xdx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3}$.

31. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$.

32. $\int \sqrt{4x^2-4x+3}dx$.

33. $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$.

34. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

35. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

36. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}}$.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

6. Формула Ньютона-Лейбница

Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти определенные интегралы:

1. $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$.

2. $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$.

3. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

4. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$.

5. $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$.

6. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$.

7. $\int_2^6 \sqrt{x-2}dx$.

8. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$.

9. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

10. $\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}dz$.

11. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 \alpha d\alpha$.

12. $\int_0^1 \frac{y^2dy}{\sqrt{y^6+4}}$.

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \alpha d\alpha$.

14. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

15. $\int\limits_{1}^{e}\frac{\sin(\ln x)dx}{x}$.　　16. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$.

17. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} ctg^4\varphi d\varphi$.　　18. $\int\limits_{0}^{1}\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

7. Интегрирование по частям и замена переменных в определенном интеграле

Преобразовать определенные интегралы с помощью указанных подстановок:

1. $\int\limits_{1}^{3}\sqrt{x+1}dx$, $x=2t-1$.　　2. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $x=\sin t$.

Применяя указанные подстановки, вычислить следующие интегралы:

3. $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $x=t^2$.　　4. $\int\limits_{3}^{29}\frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}dx$, $x-2=z^3$.

5. $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dt}{3+2\cos t}$, $tg\frac{t}{2}=z$.　　6. $\int\limits_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$, $e^x-1=z^2$.

Вычислить интегралы:

7. $\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.　　8. $\int\limits_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$.　　9. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$.

10. $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.　　11. $\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

12. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx$.　　13. $\int\limits_{1}^{e}\ln xdx$.　　14. $\int\limits_{0}^{1}x^3e^{2x}dx$.

15. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}\arcsin xdx$.　　16. $\int\limits_{0}^{\pi}e^x\sin xdx$.　　17. $\int\limits_{1}^{e}\sin(\ln x)dx$.

8. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4x-x^2$ и осью абсцисс.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$, осью Ox и

прямой $x = e$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = tgx$, осью Ox и прямой $x = \dfrac{\pi}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = 0$, $x = 2$ и кривыми $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.

6. Найти площадь фигуры, заключенной между параболой $x^2 = 4y$ и локоном Аньези $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + 1$, $y = \cos x$ и осью Ox.

8. Найти площадь, содержащуюся внутри астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

9. Найти площадь, ограниченную осью Ox и одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

11. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками $(0,0)$ и $(4,8)$.

12. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\cos x$, заключенной между точками с абсциссами $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

13. Найти длину одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

14. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ $(0 \le x \le \pi)$.

15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

9. Несобственные интегралы

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 2. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$. 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. 4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$. 6. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ $(a > 1)$. 7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2 + 1}dx$. 8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$.

9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$. 10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} ctgxdx$.

Используя признаки сходимости несобственных интегралов, установить, сходятся или расходятся следующие интегралы:

11. $\int\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}dx$. 12. $\int\limits_{e}^{+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$. 13. $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{3+\arcsin\dfrac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$.

14. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\dfrac{2+\sin x}{x^2}dx$. 15. $\int\limits_{1}^{3}\dfrac{2+\cos x}{(x-1)^2}dx$. 16. $\int\limits_{3}^{6}\dfrac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+2x-15)^2}}$.

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Понятие функции нескольких переменных. Область определения функции. Линии уровня функции

1. Выразить объем конуса V как функцию его образующей x и радиуса основания y.

2. Найти область определения функции $f(x,y)=xy+\dfrac{y}{x}$. Вычислить следующие значения функции: $f(1;1)$, $f(-2;1)$, $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$, $f(-x;-y)$.

3. Найти область определения функции $z=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1-y^2}$.

4. Найти линии уровня функции $z=\dfrac{1}{9x^2+16y^2}$.

5. Выразить объем V правильной треугольной пирамиды как функцию ее высоты x и бокового ребра y.

6. Выразить площадь треугольника, если его периметр $2p$, как функцию сторон x и y.

7. Найти $f(1;2)$, $f(-3;5)$, $f(a;b)$, $f\left(a;\dfrac{1}{a}\right)$, $f(y;x)$, если $f(x;y)=\dfrac{x+y}{x-y}$.

8. Найти значение функции $z=\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{1-x^2-y^2}$ в точках окружности $x^2+y^2=2$.

9. Найти $f(x;y)$, если $f(x+y;x-y)=xy+y^2$.

10. Найти и изобразить области определения следующих функций:

1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; 2) $z=\sqrt{-(x-y)^2}$;

3) $z=\ln(x+y)$; 4) $z=\ln(4+4x-y^2)$;

5) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(9-x^2-y^2)$; 6) $z=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-y^2}$;

7) $z=\sqrt{-x}+\sqrt{y}$; 8) $z=\dfrac{x}{y}$;

9) $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$; 10) $z=\ln(xy)$;

11) $z=\ln x+\ln y$; 12) $z=\dfrac{1}{4-x^2-y^2}$;

13) $z=\sqrt{y\cdot\sin x}$; 14) $z=\sqrt{\sin(\pi(x^2+y^2))}$;

15) $z=\arcsin(3-x^2-y^2)$; 16) $z=\ln\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

17) $z=x+\arccos y$; 18) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;

19) $z=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$; 20) $z=\arcsin x+\arcsin y+\arcsin z$.

11. Найти и построить линии уровня следующих функций:

1) $z=2x+y$; 2) $z=x^2+y^2$; 3) $z=x^2-y^2$;

4) $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$; 5) $z=xy$; 6) $z=\dfrac{y}{x^2}$;

7) $z=\dfrac{y-x^2}{x^2}$; 8) $z=4-|x|-|y|$; 9) $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.

§ 2. Предел и непрерывность функций двух переменных

1. Найти следующие пределы функций:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+xy)\sin\dfrac{1}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to2}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2+y^2+1}-1}{(x-3)^2+y^2}$;

5) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}$; 6) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$;

7) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$; 8) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

9) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$; 10) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to3}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

11) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2x}{x+y}$; 12) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2-y^2}{2x^2+y^2}$;

13) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

2. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^y$, если точка (x,y) движется по кривой $y=x^2$.

3. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+y)}{y+x^2}$, если точка (x,y) движется по кривой $y=x^2$
.

4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2-y^2}, \textit{если} \ \ x^2+y^2\le 4,\\ 0, \ \textit{если} \ x^2+y^2>4.\end{cases}$$

5. Найти почки разрыва (или линии разрыва) следующих функций:

1) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$;
2) $z=\dfrac{x-y^2}{x+y}$;
3) $z=\dfrac{2x-1}{x^2+y^2-1}$;
4) $z=\ln(x^2+y^2)$;
5) $z=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$;
6) $z=\sin\dfrac{1}{xy}$.

§ 3. Частные производные

Найти частные производные функций:

1. $z=x^4+y^4-3axy$.
2. $z=\dfrac{x}{y}$.
3. $z=\dfrac{xy}{x-y}$.
4. $z=\ln(x^2+y^2)$.
5. $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$.
6. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.
7. $z=xe^{-yx}$.
8. $z=x^y$.
9. $z=\ln\sin(x-2y)$.
10. $z=e^{\cos(yx)}$.
11. $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.
12. $z=\ln\sin\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}$.
13. $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}$.
14. $u=(xy)^z$.
15. Найти $f'_x(4;3)$ и $f'_y(4;3)$, если $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
16. Найти $f'_x(1;2;0)$, $f'_y(1;2;0)$, $f'_z(1;2;0)$, если $f(x,y,z)=\ln(xy+z)$.

17. Найти $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

18. Вычислить $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, если $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

19. Вычислить $\mathrm{mod}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \psi} & \dfrac{\partial y}{\partial \psi} & \dfrac{\partial z}{\partial \psi} \end{vmatrix}$, если $x=r\cdot\cos\theta\cdot\sin\psi$,
$y=r\cdot\sin\theta\cdot\sin\psi$, $z=r\cdot\cos\psi$.

20. $z=\sqrt{x}\cdot\sin\dfrac{y}{x}$; доказать, что $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{2}$.

21. $z=x^y$; доказать, что $\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

22. $T=\pi\cdot\sqrt{\dfrac{l}{g}}$; доказать, что $l\cdot\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\cdot\dfrac{\partial T}{\partial g}=0$.

23. $z=y^2\cdot\sin(x^2-y^2)$; доказать, что $y^2\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

24. $u=(x-y)\cdot(y-z)\cdot(z-x)$; доказать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

25. $u=x+\dfrac{x-y}{y-z}$; доказать, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$.

§ 4. Полный дифференциал функции

Найти полные дифференциалы следующих функций:

1. $z=x^2-2xy$.

2. $z=y^2x^3$.

3. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

4. $z=\sin^3 x+\cos^2 y$.

5. $z=y\cdot x^y$.

6. $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$.

7. $z=x+y\cdot e^{\frac{x}{y}}$.

8. $z=\ln tg\,\dfrac{x}{y}$.

9. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 10. $u=arctg\dfrac{xy}{z^2}$.

11. Найти $df(3;4;5)$, если $f(x,y,z)=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

12. Вычислить приближенно $(1{,}03)^{3{,}001}$.

13. Вычислить приближенно $(0{,}97)^{2{,}02}$.

14. Вычислить приближенно $\sqrt{(6{,}03)^2+(8{,}04)^2}$.

15. При деформации цилиндра его радиус R увеличился с 2 до 2,05 дм, а высота H уменьшилась с 10 до 9,8 дм. Найти приближенно изменение объема V цилиндра по формуле $\Delta V\approx dV$.

16. При деформации конуса его радиус R увеличился с 30 до 30,1 см, а высота H уменьшилась с 60 до 59,5 см. Найти приближенно изменение объема V конуса по формуле $\Delta V\approx dV$.

17. Одна сторона прямоугольника $a=$ 10 см, а другая сторона $b=$ 24 см. Как изменится диагональ l прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 мм, а сторону b укоротить на 1 мм? Найти приближенную величину изменения диагонали l и сравнить с точной.

§ 5. Дифференцирование сложных функций

1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\dfrac{y}{x}$, где $x=e^t$, $y=1-e^{2t}$.

2. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, где $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$.

3. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=H$.

4. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=e^{\frac{x}{y}}$, где $y=\sin^3 x$.

5. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, где $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$, где $y=\cos x$.

6. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=arctg\dfrac{y}{x}$, где $y=x^2$.

7. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=x^y$, где $y=\ln x$.

8. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z=x^y$, где $y=\varphi(x)$.

9. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z=f(u,v)$, где $u=x^2-y^2$, $v=e^{xy}$.

10. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = arctg\frac{u}{v}$, где $u = x\sin y$, $v = x\cos y$.

11. Доказать, что если $u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2)$, где $x = R\cos\varphi \cdot \cos\psi$, $x = R\cos\varphi \cdot \sin\psi$, $z = R\sin\varphi$, то $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \psi} = 0$.

12. Доказать, что функция $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

13. Доказать, что функция $w = f(u,v)$, где $u = x + at$, $v = y + bt$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}$.

§ 6. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков

1. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = \ln(x^2 + y)$.

2. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = arctg\frac{y}{x}$.

3. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для следующих функций:

1) $z = \sin(ax - by)$; 2) $z = \frac{x}{y}$; 3) $z = \ln(x + 2y)$.

4. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, если $u = \sin(xyz)$.

5. Найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, если $z = \sin(xy)$.

6. $z = 2\cos^2\left(x - \frac{t}{2}\right)$; доказать, что $2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

7. $z = e^{\frac{x}{y}}$; доказать, что $y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$.

8. Доказать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x - y}$, если $z = \frac{xy}{x - y}$.

9. Доказать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0$, если $z = arctg(2x - t)$.

10. Показать, что функция $z = arctg\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

11. Показать, что функция $u(x,t) = A\sin(a\lambda t + \varphi)\sin\lambda x$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

12. Найти d^2z функции $z = x^2y^2$.

13. Найти d^2z функции $z = y\ln x$.

14. Найти d^2u функции $u = xyz$.

15. Найти $df(1;2)$ и $d^2f(1;2)$, если $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

§ 7. Производная по направлению. Градиент функции

1. Найти производную функции $u(M) = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ в точке $M_0(0,0,0)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M(3,4,0)$.

2. Найти производную функции $u(M) = xy^2 + z^2 - xyz$ в точке $M(1,1,2)$ в направлении, составляющем с координатными осями углы соответственно в 60°, 45° и 60°.

3. Найти скорость изменения скалярного поля $u(M) = xyz$ в точке $M(5,1,-8)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(9,4,4)$.

4. Определить характер роста скалярного поля $u(M) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в направлении вектора $\vec{l} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$ в точке $M(1,1,1)$. Найти величину скорости изменения данного поля.

5. Найти величину и направление градиента скалярного поля $u(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $M(1,-1,2)$. Определить, в каких точках градиент перпендикулярен к оси Ox, в каких точках он равен нулю.

6. Найти градиент поля $u(M) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(1,2,2)$.

7. Найти градиент скалярного поля $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

8. Найти наибольшую скорость возрастания поля $u(M) = x^y - z$ в точке $M_0(2,2,4)$.

9. Найти наибольшую скорость возрастания поля $u(M) = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точке $M(6,4,0)$.

§ 8. Экстремумы функции нескольких переменных

1. Исследовать на экстремум функцию $z=(x-1)^2+2y^2$.

2. Исследовать на экстремум функцию $z=(x-1)^2-2y^2$.

3. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

4. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.

7. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2-2x-4\sqrt{xy}-2y+8$.

8. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+8y^3-6xy+1$.

9. Исследовать на экстремум функцию $z=2xy-4x-2y$.

10. Исследовать на экстремум функцию $z=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

11. Исследовать на экстремум функцию $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

§ 9. Наибольшее и наименьшее значения непрерывной ФМП. Условный экстремум

1. Найти экстремум функции $z=6-4x-3y$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$.

2. Найти условный экстремум функции $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ при $x+y=2$.

3. Найти условный экстремум функции $z=xy$ при $x^2+y^2=2$.

4. Найти условный экстремум функции $z=x^2+y^2$ при $3x+2y=6$.

5. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в области $x\le 0$, $y\le 0$, $x+y\ge -3$.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=1+x+2y$ в области $x\ge 0$, $y\ge 0$, $x+y\le 1$.

7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^3+y^3-3xy$ в области $0\le x\le 2$, $-1\le y\le 2$.

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-y^2$ в области $x^2+y^2\le 1$.

9. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих объем V, найти тот, полная поверхность которого наименьшая.

10. Из всех треугольников с периметром $2p$ найти тот, который имеет наибольшую площадь.

РАЗДЕЛ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах

Вычислить следующие повторные интегралы:

1. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$.
2. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 (x+y)^{-2} dy$.
3. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_x^{3x} \frac{y}{x} dx$.
4. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2 dy}{y^2}$.
5. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r dr$.
6. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dy$.

Написать уравнения линий, ограничивающих области, на которые распространены нижеследующие повторные интегралы, и начертить эти области:

7. $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} f(x,y) dy$.
8. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy$.
9. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{3-y}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y) dx$.
10. $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y) dy$.
11. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y) dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y) dx$.
12. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y) dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y) dy$.

13. Записать двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области (P) в виде повторных интегралов двумя способами, если область (P) ограничена линиями $x=0$, $y=0$ и $x+3y=6$.

14. Записать двумя способами двойной интеграл от функции $f(x,y)$ в виде повторных интегралов, если область (P) расположена в первой четверти и ограничена линиями $4x^2+y^2=4, \quad 2x+y=2$.

Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_{(P)} f(x,y) dxdy$ для указанных областей (P):

15. (P) – треугольник с вершинами $O(0;0), \quad A(1;0), \quad B(1;1)$.
16. (P) – параллелограмм с вершинами $A(1;2), \quad B(2;4), \quad C(2;7), \quad D(1;5)$.

Переменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах:

17. $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)dx$.

18. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx$.

19. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$.

20. $\int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\frac{8-y}{2}} f(x,y)dx$.

21. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{4}}^{\frac{1}{x}} f(x,y)dy$.

22. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy$.

23. $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)dy$.

24. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$.

25. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\ln y}^{y} f(x,y)dx$.

26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} f(x,y)dy$.

27. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(P)}\left(x^3+y^3\right)dxdy$, если область (P) ограничена линиями $y=\frac{1}{2}x, \quad y=x, \quad x=4$.

28. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(P)}\frac{x}{y}dxdy$, если область (P) ограничена линиями $y=x^2, \quad y^2=x, \quad y=\frac{1}{4}$, причем $y\geq\frac{1}{4}$.

29. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(P)}xydxdy$, если область интегрирования (P) – треугольник, ограниченный прямыми $x=0, \quad y=0, \quad x+y=1$.

30. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(P)}x^2ydxdy$, если (P) – область, ограниченная линиями $y=x^2, \quad y=1$.

31. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(P)}\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, где (P) – часть круга радиуса a с центром в точке $O(0;0)$, лежащая в первой четверти.

32. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(P)}\sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$, где (P) – треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(1;-1)$ и $B(1;1)$.

§ 2. Замена переменных в двойном интеграле

Перейти к полярным координатам r,φ и расставить пределы интегрирования по новым координатам:

1. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^3 f(x,y)dy$. 2. $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^x f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$.

3. $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$, где (P) – круг $x^2+y^2 \le R^2$.

4. $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$, где (P) – круг $x^2+y^2 \le by$.

5. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 f\left(\dfrac{y}{x}\right)dy$. 6. $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dxdy$, дзе (P) – область, ограниченная лемнискатой $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$.

Переходя к полярным координатам, вычислить двойные интегралы:

7. $\iint\limits_{(P)} \dfrac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где область (P) ограничена линиями $x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=16\ (x\ge 0, y\ge 0)$.

8. $\iint\limits_{(P)} \dfrac{ydxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где область (P) ограничена линиями $x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=9\ (y\ge 0)$.

9. $\iint\limits_{(P)} \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где область (P) определена неравенствами $\dfrac{\pi^2}{4} \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$.

10. $\iint\limits_{(P)} \dfrac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, где (P) – круг $x^2+y^2 \le 16$.

11. $\iint\limits_{(P)} \sqrt{4a^2-x^2-y^2}dxdy$, где (P) – круг $x^2+y^2 \le 2ax$.

12. $\iint\limits_{(P)} (x+y)dxdy$, где область (P) ограничена окружностью $x^2+y^2=R^2$
.

13. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{x^2+y^2}dy$. 14. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2-x^2}dx$.

15. $\iint\limits_{(P)} x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где (P) – область, ограниченная лемнискатой $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right),\ x \ge 0$.

§ 3. Геометрические и физические приложения двойного интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур

1. Построить области, площади которых выражаются интегралами:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{5x} dy$; б) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}} dy$; в) $\int\limits_0^a dy \int\limits_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$.

Вычислить эти площади.

2. Построить области, площади которых выражаются интегралами:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{arctg2} d\varphi \int\limits_0^{3\sec\varphi} rdr$; б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi} rdr \quad (b > a > 0)$.

Вычислить эти площади.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x, \quad y^2 = 4x, \quad y = 1, \quad y = 3$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2$ и параболой $y = x^2 - 1$.

5. Вычислить площадь области, ограниченной линиями $x = y^2 + 1$, $x = 5$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$.

7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой (лемнискатой) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = a(1+\cos\varphi), \quad r = a\cos\varphi, \quad (a > 0)$.

2. Вычисление объемов тел

В задачах 9–12 нарисуйте тела, объемы которых выражаются данными повторными интегралами:

9. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)dy$.

10 $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4-x-y)dy$.

11. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)dy$.

12. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-x}^2 (4-x-y)dy$.

Найдите объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

13. $z = 0$, $z = 3 - x^2 - y^2$.

14. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=4$, $z=x^2+y^2+1$.

15. $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

16. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями: $z=\frac{1}{2}y^2$, $2x+3y-12=0$, $x=0$, $z=0$.

17. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями: $z=9-y^2$, $y=x^2$, $z=0$, $x=0$.

18. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $2az=x^2+y^2$ и сферой $x^2+y^2+z^2=3a^2$. (Подразумевается область, лежащая внутри параболоида).

19. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью *xOy*, цилиндром $x^2+y^2=2ax$ и конусом $x^2+y^2=z^2$.

3. Вычисление площади поверхности

20. Найти площадь части плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$, заключенной между координатными плоскостями.

21. Вычислить площадь части поверхности $ay=x^2+z^2$, расположенной в первом октанте и ограниченной плоскостью $y=2a$.

22. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=px$, $p>0$.

23. Найти площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=ay$.

24. Найти площадь части поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=1$.

25. Найти площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной цилиндром $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$.

4. Приложения двойных интегралов к механике

26. Найти массу круглой пластинки радиуса *R*, если поверхностная плотность $\gamma(x,y)$ материала пластинки в каждой точке $P(x,y)$ пропорциональна расстоянию точки *P* от центра круга.

Найти массу пластинки (*P*) с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$:

27. $(P): 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2;\quad \rho(x,y)=xy$.

28. $(P): 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1; \quad \rho(x,y) = \dfrac{x^2}{1+y^2}$.

29. $(P): 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2; \quad \rho(x,y) = x^2 y e^{xy}$.

30. (P) ограничена линиями $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0\ (y > 0)$; $\rho(x,y) = x^2 + y^2$.

31. (P) ограничена лемнискатой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $(x \ge 0)$; $\rho(x,y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$.

32. Найти статический момент полукруга $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ относительно диаметра, если плотность $\delta = 1$.

33. Найти статические моменты M_x и M_y фигуры, лежащей в первой четверти и ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ и координатными осями, если в каждой точке фигуры плотность пропорциональна произведению координат этой точки.

34. Найти массу круглой пластинки $(P)\,(x^2 + y^2 \le 1)$ с поверхностной плотностью $\rho(x,y) = 3 - x - y$.

35. Найти центр тяжести однородного полукруга радиуса *R*.

Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями:

36. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 4$.

37. $y^2 = ax, \quad y = x$.

38. $r = 1 + \cos\varphi$.

39. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

РАЗДЕЛ 6. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: с разделяющимися переменными, однородные

1. Определить порядок дифференциального уравнения (ДУ):

1) $y'' - 3y' + 2y - 4 = 0$, 2) $x(1+x)y' - (1+2x) = 0$, 3) $y^{(IV)} - 16y'' = 0$, 4) $y''' - 6y'' - 6y = 0$.

2. Показать, что функция $y = x\left(1 + \int \dfrac{e^x}{x}dx\right)$ является решением дифференциального уравнения $xy' - y = xe^x$.

3. Выяснить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений, указанные функции:

1) $xy'' = 2y$, $y = 5x^2$; 2) $y'' = x^2 + y^2$, $y = \dfrac{1}{x}$;

3) $y''+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$; 4) $y'''-8y=0$, $y=e^{2x}$;

5) $y''-4y'+3y=x-1$, $y=(C_1+C_2)e^x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$;

6) $y''-4y'+3y=x-1$, $y=C_1e^{3x}+C_2e^x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$.

4. Составить ДУ, общее решение которого $y=C_1x+\frac{C_2}{x}$.

Проинтегрировать ДУ, найти указанные частные решения:

5. $xy'-y+2=0$; $y=3$ при $x=1$.
6. $(x^2+4)y'-2xy=0$; $y=5$ при $x=1$.
7. $y'=y-1$; $y=2$ при $x=0$.
8. $y'-\cos x=0$; $y=0$ при $x=0$.
9. $y'=4x^3$; $y=0$ при $x=0$.
10. $xy'=\frac{y}{\ln x}$; $y=1$ при $x=e$.
11. $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y=-1$ при $x=0$.
12. $y'=y^2$; $y=1$ при $x=-1$.
13. $y'tgx-y=1$; $y=1$ при $x=\frac{\pi}{2}$.
14. $xy'=y\ln y$; $y=e$ при $x=1$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

15. $(x+3)dy-(y+3)dx=0$.
16. $(y-2)dx+(x-2)dy=0$.
17. $y'=\frac{4}{x^2-4}$.
18. $y'=\frac{y^2-4}{4}$.
19. $(xy^2+x)dx+(y+x^2y)dy=0$.
20. $y'=\frac{xy^2+x}{x^2y-y}$.
21. $y'=y^2\cos x$.
22. $y'=y^{\frac{2}{3}}$.
23. $\sin xdx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0$.
24. $y\sin\frac{x}{2}dx-\cos\frac{x}{2}dy=0$.
25. $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$.
26. $xy(1+x^2)dy-(1+y^2)dx=0$.

Решить диффернциальные уравнения:

27. $tgx\cdot\sin^2 ydx+\cos^2 x\cdot ctgydy=0$. 28. $xyy'=1-x^2$.

29. $y'tgx=y$.

30. Решить уравнение $x(y^2-4)dx+ydy=0$.

31. Найти частный интеграл уравнения $y'\cos x = \dfrac{y}{\ln y}$, удовлетворяющий начальному условию $y(0) = 1$.

32. Найти общий интеграл уравнения $y' = tgx \cdot tgy$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

33. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$.

34. $xdy - (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = 0$.

35. $(x^2 - y^2)dy - 2yxdx = 0$.

36. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$.

37. Найти частное решение уравнения $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

§ 2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: линейные, Бернулли, в полных дифференциалах

Найти общие решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

1. $y' - 4y = e^{2x}$.

2. $y' - \dfrac{xy}{x^2+1} = x$.

3. $y' - ytgx = \dfrac{2x}{\cos x}$.

4. $y' + y = x + 2$.

5. $y'x - y - x^2 = 0$.

6. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x$.

7. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3$.

8. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$.

9. $y' = y \cdot tgx + \cos x$.

10. $xy' - y = x^2 \cos x$.

Найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям.

11. $xy' + y - e^x = 0$; $y = b$ при $x = a$.

12. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$; $y = 0$ при $x = 0$.

13. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$; $y = 0$ при $x = 0$.

Проинтегрировать следующие уравнения Бернулли.

14. $y' = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}$.

15. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

16. $xdy = (x^5y^2 - 2y)dx$.

17. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Найти общий интеграл следующих дифференциальных уравнений.

18. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$.

19. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.

20. $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$.

21. $(x^3-3xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)dy=0$.

22. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$.

23. Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$ выбрать ту, которая проходит через начало координат.

24. Решить уравнение $(1+x\sqrt{x^2+y^2})dx+(-1+\sqrt{x^2+y^2}ydy=0$.

25. Из семейства интегральных кривых дифференциального уравнения $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$ выбрать ту, которая проходит через начало координат.

§ 3. Основные понятия о ДУ высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Проверить, будет ли функция $y=C_1x^{\frac{3}{2}}+C_2$ общим решением дифференциального уравнения $2xy''=y'$ в области $x>0$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1}=4$, $y'\big|_{x=1}=3$.

2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y''=\cos x$.

3. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''=x+1$, проходящую через точку $M_0(1;1)$ и касающуюся в этой точке прямой $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

4. Для данного дифференциального уравнения $y'''=\dfrac{24}{(x+2)^5}$ найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=-1$.

5. Найти общее решение уравнения $y''=2y'$.

6. Проинтегрировать дифференциальное уравнение второго порядка $y''+y'tgx=\sin 2x$.

7. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(1+x^2)y''-2xy'=0$.

8. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $yy''-y'^2=0$.

§ 4. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Найти общие решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1. $y''-4y'+3y=0$. 2. $y''-7y'+12y=0$.

3. $y''+2y'-8y=0$. 4. $y''+y'-12y=0$.

5. $y'' + 3y' + 2y = 0$.
6. $y'' + 6y' + 5y = 0$.
7. $y'' - 4y' = 0$.
8. $y'' - 36y' = 0$.
9. $y'' - 2y' + y = 0$.
10. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
11. $y'' + 8y' + 16y = 0$.
12. $y'' + 10y' + 25y = 0$.
13. $y'' - 4y' + 13y = 0$.
14. $y'' - 6y' + 34y = 0$.
15. $y'' + 6y' + 25y = 0$.
16. $y'' + 8y' + 25y = 0$.
17. $y'' + 9y = 0$.
18. $y'' + 16y = 0$.

§ 5. Линейные неоднородные ДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Метод вариации произвольных постоянных

Проинтегрировать дифференциальные уравнения.

1. $y'' - 2y' + 2y = 6e^{2x}$.
2. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
3. $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$.
4. $y'' + 4y' + 4y = 2\sin 2x + 3\cos 2x$.
5. $y'' - 6y' - 7y = 32e^{3x}$.
6. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.
7. $y'' + 9y = e^x \cos 3x$.
8. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнения.

9. $y'' + y = tgx$. 10. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$. 11. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

РАЗДЕЛ 7. РЯДЫ

§ 1. Числовой ряд и его сумма. Действия над рядами. Простейшие свойства числовых рядов. Необходимое условие сходимости ряда. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов

1. Дана формула общего члена ряда: а) $a_n = \cos n\pi \sin \dfrac{\pi}{2^n}$;

б) $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{n^n \cdot \sqrt{n}}$.

Написать четыре первых члена ряда.

2. Написать $a_{n+1}, a_{2n}, a_{3n-1}, a_{n^2}$, если $a_n = \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

3. Написать простейшую формулу общего члена ряда по указанным членам:

а) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+...$; б) $\frac{2}{3}+\frac{5}{8}+\frac{10}{13}+\frac{17}{18}+\frac{26}{23}+...$.

4. Исследовать на сходимость следующие числовые ряды:

а) $0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+...+\sqrt[n]{0,001}+...$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$.

5. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2\left(n+1\right)^2}$.

6. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

7. Дана формула общего члена ряда:

а) $a_n=\frac{2n^2+1}{\sqrt{2^n+1}}$; б) $a_n=\frac{2+\left(-1\right)^n}{n!}$; в) $a_n=\frac{\left(-1\right)^n\cdot\left(n+1\right)}{2^n}$; г) $a_n=\frac{3n+2}{n^2+4}$;

д) $a_n=\frac{2+\left(-1\right)^n}{n^2+4}$.

Написать четыре первых членов ряда.

8. Дана формула общего члена ряда:

а) $a_n=\frac{1}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}$; б) $a_n=\frac{\left(-1\right)^n\left(n-1\right)}{2^{n+3}}$; в) $a_n=\frac{3+\left(-1\right)^n}{n+1}$.

Написать пять первых членов ряда.

9. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным членам:

а) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+...$; б) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\frac{1}{5\ln 5}+...$;

в) $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{42}...$; г) $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{15}+\frac{4}{31}+...$;

д) $\frac{\sin\left(\pi/2\right)}{\sqrt{2}}-\frac{\sin\left(\pi/4\right)}{\sqrt{4}}+\frac{\sin\left(\pi/6\right)}{\sqrt{6}}-\frac{\sin\left(\pi/8\right)}{\sqrt{8}}+...$;

е) $2+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+...$.

10. Написать возможную (простейшую) формулу общего члена для следующих рядов:

а) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+...$; б) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+...$;

в) $1-\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}+...$;

г) $1-\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+...$; д) $1+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{3}+3+\frac{1}{4}+4+\frac{1}{5}+...$;

е) $2+\frac{1}{7}+\frac{4}{17}+\frac{3}{31}+\frac{6}{49}+...$; ж) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{23}+...$.

11. Пусть $a_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$. Написать $a_{n+2}, a_{n+m}, a_{mn}, a_{n^3}$. Найти $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

12. Пусть $a_n=\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$. Вычислить $(a_n)^2, (a_n)^3+1, \sqrt[n]{a_n}$.

13. Найти суммы следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{36n^2-24n-5}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{16n^2-8n-15}$; 7) $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+4^n}{6^{n+1}}$.

Доказать расходимость рядов, используя необходимый признак сходимости.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}$. 15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}$. 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+2}$. 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{1}{n}$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{3n+5}{5n+2}}$. 19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{1}{n}$. 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$. 21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^3+5n+1}}$.

Исследовать на сходимость следующие ряды:

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)^2}$. 23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$. 24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$. 25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{15n+1}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\operatorname{arctg}\dfrac{a}{3^n}, a>0$. 27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+5}{n^2+4}$. 28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 5^{n-1}}$. 29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+\sin^2 n\alpha}$.

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^4}$. 31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+4}{(n^2+2)2^n}$. 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$. 33. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$.

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n^4}\cdot\sqrt[4]{n+1}}$. 35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. 36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$. 38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$. 39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{2^n}$. 40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3+2n+1}{2^{n+5}(n^2+1)}$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{5}{n}}{n!}$. 42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{3^{n+1}}$. 43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$. 44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{3^n\cdot n!}$. 45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!}{n!}$.

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2n)!!}$. 47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{(n^2+1)3^n}}{n\cdot 2^{\frac{n}{2}}}$. 48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2n+5)}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n\cdot n^2}$. 50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n^2}$. 51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$. 52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$.

53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$. 54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$. 55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$. 56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$.

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\operatorname{tg}\frac{1}{5^n}$. 58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.

§ 2. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Исследовать на сходимость следующие ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{n}{5^n}$.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{3n+2}\right)^n(n-1)^2$.
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$.
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$.
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot 3^n}{(2n+1)^n}$.
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n}$.
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n}$.
15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$.
17. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}$.
19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{n!2^n}$.
21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$.
22. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.
23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)$.
24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(3n+1)}$.
25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$.
26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots n^2}{(4n-3)!!}$.
27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$.
28. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.
29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}$.
30. Доказать верность следующих равенств:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{3n}}{n!}=0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{4^{n^2}}=0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$.

§ 3. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница. Оценка остатка ряда. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость

1. Доказать сходимость знакочередующегося ряда

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}+\ldots \quad .$$

2. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд

$$1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+\ldots \ .$$

3. Вычислить приближенно с точностью до 0,01 сумму ряда

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^3}+\ldots \ .$$

4. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

5. Найти приближенно (с точность до 0,01) сумму следующего ряда Лейбница: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(3n)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

Исследовать сходимость следующих знакопеременных рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимость.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+2}{n}$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(3n-1)^3}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$. 11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln n}{n}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-\ln n}$. 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{3^n}$. 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\dfrac{1}{n^2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n^2+2}{5n^2-2}$. 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{3n+1}{4n+1}\right)^n$. 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$.

19. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln n\sqrt{\ln\ln n}}$. 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(5n-3)!}$. 21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n)!}{4^n n!}$.   24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\sin n}{n^4}$.   25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+5}$.   27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n+3}{n^2+4}$.   28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos 5n}{3^n}$.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}7^n}{(3n+2)^n}$.   30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$.   31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\dfrac{n+3}{2n+1}$.

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2+\ln n)^3}$.   33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{5^{n^2}}{n^n}$.

§ 4. Функциональные ряды, область сходимости и сумма ряда. Равномерная сходимость функциональных рядов

1. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x-1}{x+1}+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\ldots+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n+\ldots .$$

2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2+x^2}+\frac{x^2}{2+x^4}+\ldots+\frac{x^n}{2+x^{2n}}+\ldots .$$

3. При каких x сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n 2^{nx}$?

4. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}+\ldots .$$

5. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4^{2n}(3x+2)^{2n-1}$.

6. Исследовать, равномерно ли сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{3^n}$.

7. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$ является непрерывной функцией при всех x.

8. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^4}$ в области его сходимости?

9. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$?

§ 5. Степенные ряды

Найдите область сходимости степенного ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$. 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 x^n}{5^n}$.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{3^{n^3}}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(-3)^n}{n}(x+2)^n$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}(x+2)^n$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3}{2n+3}(x+3)^{2n}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n}(x-3)^n$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}}(x+7)^n$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}(x-2)^{2n}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)}(x+6)^n$.

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$. 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1)4^n}$. 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3}(x-2)^{3n}$. 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$. 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n}(x+6)^n$. 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3}(x-4)^{2n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}$. 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$. 25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^n}(x-3)^n$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$. 27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n}(x+4)^n$. 28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}(x+1)^{2n-1}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}(x+3)^n$. 30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(3n+1)^3}(x-1)^{3n}$. 31. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n tg\frac{1}{n}$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{n}(x-1)^n$. 33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n\ln^2(n+1)}$. 34. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$.

§ 6. Ряды Тейлора. Достаточные условия представления функции рядом Тейлора. Разложение основных функций в ряд Маклорена

1. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=e^x\sin x$.

2. Разложить функцию $y=\dfrac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x=3$.

3. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=e^{x^2}$.

4. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

5. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

6. Разложить в ряд Маклорена функцию $y=shx$.

7. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=arctg\dfrac{x+3}{x-3}$ и найти радиус сходимости ряда.

8. Разложить в ряд по степеням x функцию $\dfrac{e^x}{1-x}$.

9. Написать первые три члена разложения функции $f(x)=\sec x$ в ряд Маклорена.

Разложить по степеням x следующие функции и указать интервалы,в которых эти разложения имеют место.

10. $\cos 7x$. 11. $\sin x^3$. 13. $\sin\dfrac{x^2}{5}$. 14. $(1+x)e^{-x}$.

15. $\dfrac{7}{1-5x^2}$. 16. $(1-x)\ln(1-x)$. 17. $\dfrac{1}{2}(shx+\sin x)$.

18. $\dfrac{\sin 5x}{x}$. 19. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$. 20. $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$.

21. $\dfrac{5-2x}{x^2-5x+6}$. 22. $\cos^2 x$. 23. $\ln\left(12-x-x^2\right)$.

24. $\ln\dfrac{2+x^2}{1-x}$. 25. $\sin 3x\sin 5x$. 26. $\sin x\cos^2 x$.

27. $x\sin 2x\cos 3x$. 28. $\dfrac{x^3+4x+1}{x^3-1}$.

Используя дифференцирование, разложить в ряд Маклорена функцию. Найти радиус сходимости полученного ряда.

29. $\arcsin x$. 30. $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

31. Разложить функцию $\dfrac{1}{x^2+4x+7}$ в ряд по степеням $(x+2)$.

32. Разложить функцию e^x в ряд по степеням $(x+2)$.

§ 7. Применение рядов Тейлора в приближенных вычислениях. Приложения степенных рядов к решению дифференциальных уравнений и вычислению определенных интегралов

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5}$.

2. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{x\left(e^x-1\right)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln^2 x-\sin^2(x-1)}{e^{(x-1)^2}-1}$.

3. Найти производную 10-го порядка от функции $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ в точке $x=0$.

4. Используя разложения данной функции в ряд Маклорена, найти значения производных указанного порядка при $x=0$ от функции:

1) $\dfrac{2x}{1+x^2}$; $f^{(6)}(0)=?$ 2) $\sqrt[3]{8+x}$; $f^{(5)}(0)=?$

3) $x^2\sqrt[4]{1+x}$; $f^{(5)}(0)=?$ 4) $x^6 arctgx$; $f^{(13)}(0)=?$

5) $x^4\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$; $f^{(9)}(0)=?$ 6) $x^3\ln\left(1-x+x^2-x^3\right)$; $f^{(8)}(0)=?$

5. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,0001.

6. С точностью до 0,00001 вычислить $\sin 1$.

7. Вычислить с точностью до 10^{-4} определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$.

8. Найти решение дифференциального уравнения $y'=y$ при начальном условии $y(0)=1$.

9. Найти решение дифференциального уравнения $y'=x+y$; $y_0=y(0)=1$.

10. Показать, что функция $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n!)^2}$ является решением дифференциального уравнения $xy''+y'-y=0$.

11. Показать, что функция $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}$ является решением дифференциального уравнения $xy'=y(x+1)$.

12. Какая величина ошибки, если полагать $e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$?

13. Сколько надо взять членов ряда $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$, чтобы найти число e с точностью до $0,0001$?

14. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью до $0,001$.

15. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до $0,001$.

16. Вычислить $\ln 1,2$ с точностью до $0,0001$.

17. Вычислить $\ln 3$ с точностью до $0,0001$.

18. Вычислить $\sqrt{17}$ с точностью до $0,0001$.

19. Вычислить $\sqrt[3]{60}$ с точностью до $0,001$.

20. Вычислить с точностью до 10^{-3}, следующие интегралы:

а) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx$; б) $\int_5^{10} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$.

III. РАЗДЕЛ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

РАЗДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Найдите пределы функций.

В. 1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x}$.

В. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5x-5x^3}{x-4}$.

В. 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5+x}$.

В. 4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x+2}$.

В. 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x^2-1}{7x^4+3x^3+x+1}$.

В. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 3x}{7x^2}$.

В. 7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2+4x-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x+1}$.

В. 8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4}{x^2+5x^3}$.

В. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x^3}{x^2-2x^3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{3x-5}$.

В. 10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{x+1}$.

В. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{3x^2}$.

В. 12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^3+5x^5}{4x^5-x^2+x}$.

В. 13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{2x-5}$.

В. 14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+1}{3x^2+2}\right)^{x^2+5}$.

В. 15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x+1}{x+5x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x}$.

В. 16. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+4}\right)^{3x-2}$.

В. 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+x^3+2x}{5x^4+x+5}$.

В. 18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+1}{5x^2-1}\right)^{x^2}$.

В. 19. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

В. 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{x}$; $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{x-8}$.

В. 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x-1}$.

В. 22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x}{x^4+x^2+2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

В. 23. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x}$.

В. 24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$.

В. 25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x-1}{4x^3+2x^2+x}$.

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Найдите производную функции.

В. 1. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-4^{1-3x}\,tg5x.$	**В. 2.** $y=\dfrac{2^{1-3x}}{\cos(5x-2)}+x\ln^4 x.$
В. 3. $y=x^2e^{5x}-\dfrac{\ln(2x-3)}{\sin^2 x}.$	**В. 4.** $y=x\cos^3 x+\dfrac{\ln(1+e^x)}{3^{1-2x}}.$
В. 5. $y=x\cos^3 x-\dfrac{5^{1-3x}}{\ln(6x-5)}.$	**В. 6.** $y=x^3\ln(2-3x)+\dfrac{\cos^2 x}{4^{3x}}.$
В. 7. $y=x^2\ln(4x-1)-\dfrac{1+2^x}{\cos^4 x}.$	**В. 8.** $y=\dfrac{\cos(2x-1)}{x}-2^x\ln^5 x.$

В. 9. $y=x^4 2^{1+3x}+\dfrac{\sin^2 x}{\ln(7x+3)}$.	**В. 10.** $y=x\sqrt{\sin x}+\dfrac{\ln^2 x}{e^{3x}}$.
В. 11. $y=\dfrac{x^4-1}{\cos^2 x}-e^{5x}\ln^3 x$.	**В. 12.** $y=3x\sqrt[4]{\ln x}-\dfrac{\sin(2-3x)}{e^{5x}}$.
В. 13. $y=\dfrac{tg^3 x}{x}+e^{5x-1}\ln(1-3x)$.	**В. 14.** $y=\dfrac{ctg^3 x}{\sqrt{3x-2}}+e^{5x-2}\ln(1+x^2)$.
В. 15. $y=2^x\ln(3x-5)-\dfrac{\sin^5 x}{\sqrt{x}}$.	**В. 16.** $y=2^{3x}\cos(2+5x)-\dfrac{\ln^5 x}{\sqrt{3+2x}}$.
В. 17. $y=e^{5x}\sqrt{3x-1}+\dfrac{\ln^4 x}{\cos(1-7x)}$.	**В. 18.** $y=\dfrac{\ln^3 x}{\cos(3x+2)}+\sqrt[3]{tgx}\,2^{5x}$.
В. 19. $y=\dfrac{2^{\sin x}}{\ln(1+4x)}-\sqrt{3-2x}\,tg^3 x$.	**В. 20.** $y=2^{\cos x}\sqrt{5-3x}+\dfrac{ctg^4 x}{\ln(1-3x)}$.
В. 21. $y=3^{5x-2}\cos 4x-\dfrac{\sqrt{4+3x}}{\ln^3 x}$.	**В. 22.** $y=\dfrac{\ln\sin x}{x}-\sqrt[3]{2x-1}\,e^{5x}$.
В. 23. $y=\dfrac{\sin\ln x}{\sqrt{2x+1}}+3^x tg^5 x$.	**В. 24.** $y=5\sqrt[3]{\ln x}\sin(1-2x)+\dfrac{e^{3x-2}}{x}$.
В. 25. $y=\sqrt{ctgx}\log_3(2x+6)-\dfrac{e^{3x}}{\sqrt[3]{x}}$.	

Исследуйте функцию и постройте её график.

В. 1. $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$. **В. 2.** $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

В. 3. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$. **В. 4.** $y=\dfrac{1-x^2}{x^2}$.

В. 5. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **В. 6.** $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

В. 7. $y=\dfrac{x}{(1+x)^3}$. **В. 8.** $y=\dfrac{x^2-x-6}{x-2}$.

В. 9. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$. **В. 10.** $y=\dfrac{4x^3}{1-x^3}$.

В. 11. $y=\dfrac{4x^2+1}{x}$. **В. 12.** $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$.

В. 13. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$. **В. 14.** $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

В. 15. $y=\dfrac{x^4}{1-x^2}$. **В. 16.** $y=\dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$.

В. 17. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$. **В. 18.** $y=\dfrac{x^3+2}{2x}$.

В. 19. $y=\dfrac{x^4+1}{x^2}$. **В. 20.** $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

В. 21. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. **В. 22.** $y=\dfrac{(1+x)^2}{x-2}$.

В. 23. $y=\dfrac{3x-2}{5x^2}$. **В. 24.** $y=\dfrac{x^4-3}{x}$.

В. 25. $y=\dfrac{1}{x^2+3}$.

РАЗДЕЛ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Вычислить неопределенный интеграл. Проверить результат дифференцированием.

В. 1. $\int\sqrt[6]{x^5-4}\cdot x^4dx$. **В. 2.** $\int\dfrac{4x^3+1}{\sqrt{1+x+x^4}}dx$. **В. 3.** $\int(5x+6)^{15}dx$.

В. 4. $\int\dfrac{(arctgx)^9\,dx}{1+x^2}$. **В. 5.** $\int\dfrac{5x+1}{x^2+9}dx$. **В. 6.** $\int\dfrac{\ln x+9}{x\sqrt{\ln x}}dx$.

В. 7. $\int e^{-\frac{x^4}{2}}\cdot x^3dx$. **В. 8.** $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{7-x^8}}dx$. **В. 9.** $\int e^{\sin 7x}\cdot\cos 7xdx$.

В. 10. $\int\dfrac{dx}{9-7x}$. **В. 11.** $\int\dfrac{dx}{x\ln^8 x}$. **В. 12.** $\int\sin(6x+7)dx$.

В. 13. $\int\dfrac{dx}{(2x+3)^3}$. **В. 14.** $\int\dfrac{dx}{5\cos^2(3x+1)}$. **В. 15.** $\int 7^{\cos 3x}\cdot\sin 3xdx$.

В. 16. $\int\dfrac{(3\ln x+5)^3\,dx}{x}$. **В. 17.** $\int\dfrac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}dx$. **В. 18.** $\int\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{9-e^x}}dx$.

В. 19. $\int\cos(3-9x)dx$. **В. 20.** $\int 7^{x^3}\cdot x^2dx$. **В. 21.** $\int\dfrac{x^4}{1-x^5}dx$.

В. 22. $\int\dfrac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$. **В. 23.** $\int\dfrac{x^4}{9+x^{10}}dx$. **В. 24.** $\int\dfrac{tg^7x}{\cos^2 x}dx$.

В. 25. $\int\sin^7 x\cdot\cos xdx$.

2. Применяя формулу интегрирования по частям, найти неопределенный интеграл.

В. 1. $\int xe^{5x}dx$. **В. 2.** $\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$. **В. 3.** $\int x\ln(x-3)dx$.

В. 4. $\int xarctgx^2 dx$.
В. 5. $\int (x+1)e^{3x+1} dx$.
В. 6. $\int \sqrt[3]{x^2} \ln x dx$.
В. 7. $\int x^5 \ln x dx$.
В. 8. $\int \ln x^5 dx$.
В. 9. $\int x \sin(x+1) dx$.
В. 10. $\int \frac{x}{e^{2x}} dx$.
В. 11. $\int \ln x^3 dx$.
В. 12. $\int x^3 \ln x dx$.
В. 13. $\int \frac{\ln x}{x^5} dx$.
В. 14. $\int (x^2-2x)e^{-x} dx$.
В. 15. $\int x^2 e^{-\frac{x}{5}} dx$.
В. 16. $\int \frac{x^2}{e^x} dx$.
В. 17. $\int x \cos 3x dx$.
В. 18. $\int x^3 \ln^2 x dx$.
В. 19. $\int \ln(x+1) dx$.
В. 20. $\int e^{2x} \cos 3x dx$.
В. 21. $\int \arcsin 2x dx$.
В. 22. $\int x^2 \ln^2 2x dx$.
В. 23. $\int x^3 \cos 2x dx$.
В. 24. $\int (x+3)e^{2x+1} dx$.
В. 25. $\int \frac{x dx}{\sin^2 4x}$.

3. Найти неопределенный интегралы.

В. 1. $\int \frac{2x^2+11x+5}{(x-1)(x^2+4x+4)} dx$.
В. 2. $\int \frac{(-x^2-1)dx}{(x+1)(x^2+x+1)}$.
В. 3. $\int \frac{2x^2-3x-11}{(x+2)(x^2-1)} dx$.
В. 4. $\int \frac{6x^2+10x+19}{(x+4)(x^2+x+3)} dx$.
В. 5. $\int \frac{8x^2+5x+21}{(x+5)(x^2+3)} dx$.
В. 6. $\int \frac{x^3+x^2+2x+5}{(x^2+2)(x^2+5)} dx$.
В. 7. $\int \frac{(-x^2-10x-3)dx}{(x-7)(x^2+x+5)}$.
В. 8. $\int \frac{(-9x-22)dx}{(x+3)(x^2-4)}$.
В. 9. $\int \frac{-6x^2-15x-37}{(x+1)(x^2+2x+5)} dx$.
В. 10. $\int \frac{6x^2+x+8}{(x-3)(x^2+x+1)} dx$.
В. 11. $\int \frac{4x^2-4x-10}{(x-3)(x+4)(x-1)} dx$.
В. 12. $\int \frac{-3x^2-5x-5}{(x+4)(x^2+2x+3)} dx$.
В. 13. $\int \frac{5x^2-10x-20}{(x^2-4)(x-3)} dx$.
В. 14. $\int \frac{2x^2+6x+7}{(x+5)(x^2+x+7)} dx$.
В. 15. $\int \frac{8x+96}{(x+7)(x^2-9)} dx$.
В. 16. $\int \frac{3x^2+4x+7}{(x-1)(x^2+2x+4)} dx$.
В. 17. $\int \frac{7x^2+4x}{(x+1)(x^2-4)} dx$.
В. 18. $\int \frac{3x^2+5x+2}{(x^2+1)(x+5)} dx$.
В. 19. $\int \frac{x^3-3x^2+7x+5}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)} dx$.
В. 20. $\int \frac{12x^2-16x-10}{(x+1)(x^2-2x)} dx$.

В. 21. $\int \frac{7x^2+x+7}{x^2+x}dx$.

В. 22. $\int \frac{6x^2-10x-44}{(x^2-4)(x-4)}dx$.

В. 23. $\int \frac{2x^2+5x+7}{(x+5)(x^2+2x+1)}dx$.

В. 24. $\int \frac{3x^2+12x+19}{(x^2+x+5)(x+9)}dx$.

В. 25. $\int \frac{5x-3}{(x^2+3)(x+5)}dx$.

4. Вычислить определенный интегралы.

В. 1. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$.

В. 2. $\int_1^e \left(\frac{1}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}\right)dx$.

В. 3. $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$.

В. 4. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$.

В. 5. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$.

В. 6. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$.

В. 7. $\int_4^9 \left(6\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

В. 8. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+2}$.

В. 9. $\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}dx$.

В. 10. $\int_3^{16} \frac{dx}{x^2-16x-16}$.

В. 11. $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$.

В. 12. $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}}$.

В. 13. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$.

В. 14. $\int_0^1 (x+1)e^x dx$.

В. 15. $\int_0^{2\pi} \cos 5x \cos x dx$.

В. 16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.

В. 17. $\int_1^6 \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$.

В. 18. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

В. 19. $\int_3^4 \frac{x^2+2}{x-2}dx$.

В. 20. $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x}dx$.

В. 21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$.

В. 22. $\int_0^1 (2^{-x}+e^x-3)dx$.

В. 23. $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$.

В. 24. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

В. 25. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Найти и изобразить область определения функции.

В. 1. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

В. 2. $z=\sqrt{(x+1)(y+1)}$.

В. 3. $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$.

В. 4. $z=\arccos\dfrac{x^2+y^2}{9}$.

В. 5. $z=\sqrt{x\sin y}$.

В. 6. $z=\ln(4+4-y^2)$.

В. 7. $z=\sqrt{x^2+y^2-4}+\ln(9-x^2-y^2)$.

В. 8. $z=\sqrt{\sin x\cos y}$.

В. 9. $z=\dfrac{\ln(4-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

В. 10. $z=\sqrt{\sin x-1}+\sqrt{\sin y-1}$.

В. 11. $z=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

В. 12. $z=\sqrt{\dfrac{x-2}{y-2}}$.

В. 13. $z=\ln x-\ln\sin y$.

В. 14. $z=\sqrt{(x-3)(y-1)}$.

В. 15. $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

В. 16. $z=\sqrt{1+x-y^2}+\sqrt{1-x-y^2}$.

В. 17. $z=\arcsin(3-x^2-y^2)$.

В. 18. $z=\ln((x-2)(y-3))$.

В. 19. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.

В. 20. $z=\sqrt{(x-5)(y-2)}$.

В. 21. $z=\sqrt{x\cos y}$.

В. 22. $z=\ln\dfrac{y}{x^2+1}$.

В. 23. $z=\arcsin(x+y)$.

В. 24. $z=\sqrt{(x-4)(y-4)}$.

В. 25. $z=\sqrt{(x-2)(y+1)}$.

Найти частные производные первого порядка функции.

В. 1. $z=x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

В. 2. $z=\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.

В. 3. $z=\arcsin\dfrac{x+y}{xy}$.

В. 4. $z=arctg\sqrt{1+xy^3}$.

В. 5. $z=\ln\left(x+\dfrac{y}{2x}\right)$.

В. 6. $z=2^{\frac{x}{y}}+\ln(x^2-y^2)$.

В. 7. $z=\dfrac{1}{arctg\,\dfrac{y}{x}}$.

В. 8. $z=3^{x^2+y}+\ln(y-x^2)$.

В. 9. $z=\ln tg\,\dfrac{x}{y}$.

В. 10. $z=arcctg\sqrt{1+x^2y^4}$.

В. 11. $z=\arccos\dfrac{x}{\sqrt{y+x}}$.

В. 12. $z=5^{\sin\frac{y}{x}}$.

В. 13. $z=\dfrac{x-y}{x^2y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$.

В. 14. $z=tg\,\dfrac{x}{y}\cdot ctg\,\dfrac{y}{x}$.

В. 15. $z=e^{x^5y^2}\cdot\sin\dfrac{y}{x}$.

В. 16. $z=\ln\cos\dfrac{x+y}{x^3y^2}$.

В. 17. $z=4^{x^2y}+4^{y^2x}$.

В. 18. $z=\arcsin\sqrt{1+x^3y^6}$.

В. 19. $z=x^2\cdot\sqrt[3]{y}+\dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

В. 20. $z=e^{\frac{x^3+y}{x^2y^3}}$.

В. 21. $z=\ln tg\,\dfrac{x^2y}{x+y}$.

В. 22. $z=e^{\frac{x}{y}}+\dfrac{y}{\sqrt[5]{x}}$.

В. 23. $z=\dfrac{x^4+y^5}{\sqrt{x^3y^7}}$.

В. 24. . $z=\sin(x^2-y)\cdot\cos(x^3y+y^4x)$.

В. 25. $z=8^{\sin\sqrt{2xy^3}}$.

Найти полный дифференциал функции.

В. 1. $z=\sqrt{5x^2+y^3}$.

В. 2. $z=x^6y+y^3x+6$.

В. 3. $z=\dfrac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$.

В. 4. $z=\sin^3(xy)+\cos^2(yx^2)$.

В. 5. $z=\ln(x^4+y^4)$.

В. 6. $z=\arcsin\dfrac{y}{x}+\arcsin\dfrac{x}{y}$.

В. 7. $z=\ln ctg\,\dfrac{x}{y}$.

В. 8. $u=\sqrt{x^3+y^3+z^4}$.

В. 9. $z=\sqrt{7y^2+yx^3}$.

В. 10. $z=x^9y^2+y^3x^5+46$.

В. 11. $z=\ln(y^3x^4+5xy^4)$.

В. 12. $z=\sin^3(x+y)\cdot\cos(y-x^2)$.

В. 13. $z=\sqrt[3]{\dfrac{x-y}{x+y}}$.

В. 14. $z=\arccos\dfrac{y^2}{x}+\arcsin\dfrac{x}{y^3}$.

В. 15. $u=5x^4y^5z-12$.

В. 16. $z=\ln\sin(xy+3)$.

В. 17. $u=\dfrac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 18. $u=arcctg\,\dfrac{x^3y^2}{z^5}$.

В. 19. $u=\ln\sin(x^2y+xz^4)$.

В. 20. $u=\sqrt[5]{x^4+z^6+y^3}$.

В. 21. $z = e^{\frac{y^2}{x^3}}$.

В. 22. $u = x^5 y^7 z^2$.

В. 23. $z = \dfrac{x+y}{3x^4 y}$.

В. 24. $z = tg^2 x + tg^2 y$.

В. 25. $z = e^{\sqrt{x^3 y^5}}$.

Доказать равенство для заданной функции.

В. 1. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{2}$; $u = \sqrt{x}\sin\dfrac{x}{y}$.

В. 2. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$; $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В. 3. $l\dfrac{\partial u}{\partial l} + g\dfrac{\partial u}{\partial g} = 0$; $u = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

В. 4. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}$; $u = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

В. 5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2$; $u = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

В. 6. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $u = \dfrac{x}{y}$.

В. 7. $3\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $u = tg^3(2x - 3y)$.

В. 8. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $u = x \cdot e^{-\frac{y}{x}}$.

В. 9. $4\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $u = \sin^2(3x - 4y)$.

В. 10. $y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2xu$; $u = y^2\sin(x^2 - y^2)$.

В. 11. $2y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $u = \sqrt[3]{2y^2 - x^2}$.

В. 12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$; $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

В. 13. $3y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; $u = \sqrt{x^2 - 3y^2}$.

В. 14. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$; $u = \ln(e^x + e^y)$.

В. 15. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{2}{x+y}=0$; $u=\ln(x^2-y^2)$.

В. 16. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$; $u=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

В. 17. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x}$; $u=x^y$.

В. 18. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$.

В. 19. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$; $u=\ln(e^x+e^y+e^z)$.

В. 20. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=(x+y+\ln u)u$; $u=x^y\cdot y^x$.

В. 21. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$; $u=\frac{x-y}{z-t}+\frac{t-x}{y-z}$.

В. 22. $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$; $u=e^{\frac{x}{y}}$.

В. 23. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $u=\ln(x^2+y^2)$.

В. 24. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x-y}{x^2+y^2}$; $u=arctg\,\frac{x+y}{x-y}$.

В. 25. $xy\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}=0$; $u=arctg\,\frac{x}{y}$.

Найти производную функции $u(M)$ в точке M_0 по направлению, идущему к точке M.

В. 1. $u(M)=5x^4-6y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(5;4;2)$.

В.2. $u(M)=x^2-12y^3$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;1;3)$.

В. 3. $u(M)=3x^3-6y^3$; $M_0(1;1;1)$; $M(5;4;0)$.

В. 4. $u(M)=15x^5-2y^4$; $M_0(1;1;1)$; $M(0;4;2)$.

В. 5. $u(M)=4x^4+3y^3$; $M_0(1;1;1)$; $M(6;4;1)$.

В. 6. $u(M)=9x^3+3y^5$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;7;3)$.

В. 7. $u(M)=2x^2+13y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;4;2)$.

В. 8. $u(M)=10x^2+9y^5$; $M_0(1;1;1)$; $M(1;4;2)$.

В. 9. $u(M)=2x^7-13y^3$; $M_0(1;1;1)$; $M(3;4;3)$.

В. 10. $u(M)=5x^5+8y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;5;8)$.

В. 11. $u(M)=5x^4-13y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(6;5;4)$.
В. 12. $u(M)=5x^3-13y$; $M_0(1;1;1)$; $M(4;4;4)$.
В. 13. $u(M)=5yx^4+xy^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;5;3)$.
В. 14. $u(M)=2yx^2+3x^3y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;0;3)$.
В. 15. $u(M)=5yx^2+xy$; $M_0(1;1;1)$; $M(3;5;3)$.
В. 16. $u(M)=5y+xy^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;2;3)$.
В. 17. $u(M)=2yx^2-5xy^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;5;1)$.
В. 18. $u(M)=yx^4+y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;4;3)$.
В. 19. $u(M)=yx^2+2y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;1;3)$.
В. 20. $u(M)=4yx^2+x^3y$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;4;0)$.
В. 21. $u(M)=3x^2+13y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(0;4;3)$.
В. 22. $u(M)=7x^3+3y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;0;3)$.
В. 23. $u(M)=5yx+2y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(8;4;3)$.
В. 24. $u(M)=11yx^2+5y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;0;3)$.
В. 25. $u(M)=x^4+y^2$; $M_0(1;1;1)$; $M(2;7;3)$.

РАЗДЕЛ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Двойным интегрированием найти площадь области, ограниченной указанными линиями.

В. 1. $x-y=0,\ y^2=x+2$.
В. 2. $2y+x=0,\ 3-x=y^2$.
В. 3. $y^2=x+3,\ 2y-x=0$.
В. 4. $y^2=x+4,\ y=x+2$.
В. 5. $y^2=x,\ y=x-2$.
В. 6. $y^2=1-x,\ 2y=x+2$.
В. 7. $3-x=y^2,\ y=1-x$.
В. 8. $y^2=x+1,\ 2y=2-x$.
В. 9. $y^2=x+1,\ y=x-1$.
В. 10. $y^2=1-x,\ 2y+x=-2$.
В. 11. $y+x=0,\ y^2=x+2$.
В. 12. $y^2=x,\ y=2-x$.
В. 13. $3-x=y^2,\ 2y-x=0$.
В. 14. $y^2=x+3,\ y=-x-1$.
В. 15. $y^2=x+3,\ y=x+1$.
В. 16. $y^2=1-x,\ y=x+1$.
В. 17. $y=x,\ y^2=2-x$.
В. 18. $y^2+x=0,\ y=-x-2$.
В. 19. $3-x=y^2,\ y=x-1$.
В. 20. $y^2=x+1,\ 2y=x-2$.
В. 21. $y^2=x+1,\ y=1-x$.
В. 22. $y^2=x+3,\ x+2y=0$.
В. 23. $y^2+x=0,\ y=x+2$.
В. 24. $y+x=0,\ y^2=2-x$.
В. 25. $y^2=1-x,\ y=-x-1$.

2. Вычислить, переходя к полярным координатам.

В. 1. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{xdy}{x^2+y^2}$.

В. 2. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 3. $\int\limits_0^{2a} dy \int\limits_{-\sqrt{2ay-y^2}}^{0} \frac{xdx}{x^2+y^2}$.

В. 4. $\int\limits_{-2a}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{-2ax-x^2}}^{\sqrt{-2ax-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 5. $\int\limits_{-2a}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{-2ax-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 6. $\int\limits_0^{2a} dy \int\limits_{-\sqrt{2ay-y^2}}^{0} \frac{xdx}{x^2+y^2}$.

В. 7. $\int\limits_0^{2a} dy \int\limits_{-\sqrt{2ay-y^2}}^{\sqrt{2ay-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 8. $\int\limits_{-2a}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{-2ax-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 9. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{0} \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 10. $\int\limits_{-2a}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y^2-2ay}}^{\sqrt{-y^2-2ay}} \frac{xdx}{x^2+y^2}$.

В. 11. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 12. $\int\limits_0^{2a} dy \int\limits_{-\sqrt{2ay-y^2}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 13. $\int\limits_{-2a}^{0} dy \int\limits_0^{\sqrt{-y^2-2ay}} \frac{ydx}{x^2+y^2}$.

В. 14. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 15. $\int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 16. $\int\limits_{-2a}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y^2-2ay}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 17. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{ydy}{x^2+y^2}$.

В. 18. $\int\limits_{-2a}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{-x^2-2ax}}^{\sqrt{-x^2-2ax}} \frac{xdy}{x^2+y^2}$.

В. 19. $\int\limits_0^{2a} dy \int\limits_{-\sqrt{2ay-y^2}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 20. $\int\limits_{-2a}^{0} dy \int\limits_0^{\sqrt{-y^2-2ay}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 21. $\int\limits_{-2a}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y^2-2ay}}^{\sqrt{-y^2-2ay}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В. 22. $\int\limits_0^{2a} dy \int\limits_{-\sqrt{2ay-y^2}}^{\sqrt{2ay-y^2}} \frac{ydx}{x^2+y^2}$.

В. 23. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{ydy}{x^2+y^2}$.

В. 24. $\int\limits_{-2a}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{-x^2-2ax}}^{0} \frac{ydy}{x^2+y^2}$.

В. 25. $\int\limits_{-2a}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{-x^2-2ax}} \frac{xdy}{x^2+y^2}$.

РАЗДЕЛ 6. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение, предварительно определив его вид.

В. 1.
1.1. $x^2(y+1)dx+(x^3-1)(y-1)dy=0$;
1.2. $2xy'-y=3x^2$;
1.3. $(\sin xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xydy=0$.

В. 2.
1.1. $x+xy+y'(y+xy)=0$;
1.2. $y'-5\dfrac{y}{x}=x$;
1.3. $\left(4-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx+\dfrac{2y}{x}dy=0$.

В. 3.
1.1. $(1+x^2)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy$;
1.2. $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{e^{-x^2}}{x}$;
1.3. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$.

В. 4.
1.1. $(1+e^x)y\cdot y'=e^x$;
1.2. $y'-\dfrac{y}{1-x^2}=1+x$;
1.3. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-3)dy=0$.

В. 5.
1.1. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$;
1.2. $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$;
1.3. $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$.

В. 6.
1.1. $\sin x\cdot\sin ydx+\cos x\cdot\cos ydy=0$;
1.2. $y'=xy+x^3y^2$;
1.3. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$.

В. 7.

1.1. $(x^2+1)y' = 2yx + x$;

1.2. $y' + y\cos x = \sin 2x$;

1.3. $(3x^2+2y)dx + (2x-3)dy = 0$.

В. 8.

1.1. $x^2y^2y' = y-1$;

1.2. $(2x+1)y' + y = x$;

1.3. $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$.

В. 9.

1.1. $xydx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$;

1.2. $(x^2+2x-1)y' - (x+1)y = x-1$;

1.3. $(x+y^2)dx + 2xydy = 0$.

В. 10.

1.1. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \cdot y' = 0$;

1.2. $y' + \dfrac{5y}{x} = x$;

1.3. $\left(4 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \dfrac{2y}{x}dy = 0$.

В. 11.

1.1. $\sin x \cdot \sin ydx + \cos x \cdot \cos ydy = 0$;

1.2. $y' + \dfrac{y}{x} = x^3$;

1.3. $(3xy^2 - x^2)dx + (3x^2y - 6y^2 - 1)dy = 0$.

В. 12.

1.1. $x + xy + yy'(1+x) = 0$;

1.2. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^2$;

1.3. $(\ln y - 2x)dx + \left(\dfrac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$.

В. 13.

1.1. $(xy - x)dx + (xy + x - y - 1)dy = 0$;

1.2. $y' + xy = x^2 + 1$;

1.3. $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$.

В. 14.

1.1. $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$;

1.2. $y' - 2xy = 3x^3y^2$;

1.3. $(3x^2+6xy^2)dx + (6x^2y+4y^3)dy = 0$.

В. 15.

1.1. $y' - 2 = 3x^2 + 2x$;

1.2. $y' = \frac{x+3y}{2x}$;

1.3. $(x^2+y)dx + xdy = 0$.

В. 16.

1.1. $3e^x \sin y dx - (e^x - 1)\sec y dy = 0$;

1.2. $y' + y = e^x$;

1.3. $(e^y + ye^x + 3)dx + (-2 + xe^y + e^x)dy = 0$.

В. 17.

1.1. $1 + (1+y')e^y = 0$;

1.2. $y' + \frac{2y}{x} = x$;

1.3. $(2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0$.

В. 18.

1.1. $y' = 2\sqrt{y} \cdot \ln x$;

1.2. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$;

1.3. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$.

В. 19.

1.1. $yy' = \frac{1-2x}{y}$;

1.2. $y' + y = \cos x$;

1.3. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 5y)dy = 0$.

В. 20.

1.1. $y'\sin x = y\ln y$;

1.2. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$;

1.3. $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$.

В. 21.

1.1. $y' - 5 = 5x^4 + 2x$;

1.2. $y' + yctgx = tgx$;

1.3. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$.

В. 22.

1.1. $y'tgx - y = 0$;

1.2. $x(x^2-1)y' - (2x^2-1)y + 4x^3 = 0$;

1.3. $(2xy + 2y^2 - 9x^2)dx + (x^2 + 4xy)dy = 0$.

В. 23.

1.1. $y' = \frac{8}{x^2-16}$;

1.2. $\frac{dy}{dx} - yctgx = 2x\sin x$;

1.3. $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0$.

В. 24.

1.1. $y' = \frac{17}{x^2-6}$;

1.2. $xy' - 3y + x^4y^2 = 0$;

1.3. $(16x + 7y - 10)dx + (7x + 12y - 4)dy = 0$.

В. 25.

1.1. $\sqrt{21 - 8x - 4x^2}\,dy - dx = 0$;

1.2. $y'\cos x + y\sin x = 1$;

1.3. $(x^2 + 2xy + a^2)dx + (x^2 + y^2 - a^2)dy = 0$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения.

В. 1. $y'' - 2y' = x^2 - x$.

В. 2. $y'' - 2y = xe^{-x}$.

В. 3. $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$.

В. 4. $y'' - 4y' + 13y = x + 1$.

В. 5. $y'' - 4y' + 3y = (x+2)e^{x}$.

В. 6. $y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$.

В. 7. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

В. 8. $y'' - 4y' = xe^{4x}$.

В. 9. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$.

В. 10. $y'' + 5y' + 6y = 3$.

В. 11. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$.

В. 12. $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

В. 13. $y'' + 9y = 15\sin 2x$.

В. 14. $y'' - 2y' + y = \sin x$.

В. 15. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

В. 16. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

В. 17. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$.

В. 18. $y'' - 5y' + 6y = (12x-7)e^{-x}$.

В. 19. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$.

В. 20. $y'' + y = 2\cos x$.

В. 21. $y'' - y = 2x\sin x$.

В. 22. $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\sin x$.

В. 23. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$.

В. 24. $y'' - 2y' = x^2 - 1$.

В. 25. $y'' - 2y' + y = 2e^{x}$.

РАЗДЕЛ 7. РЯДЫ

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ (СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ)

1. Найдите область сходимости степенного ряда.

В. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n+1)2^n}$.

В. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

В. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 5^n}$.

В. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{\sqrt{n+1}}$.

В. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+5)^n}{2n-1}$.

В. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

В. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 5^n}$.

В. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-7)^n}{\sqrt[3]{2n+1}}$.

В. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n}(x+6)^n$.

В. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3^n}$.

В. 11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$.

В. 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}$.

В. 13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

В. 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}(x+2)^n$.

В. 15. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3x^n}{5^n}$.

В. 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^5x^{2n}}{2n+1}$.

В. 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$.

В. 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-7)^n}{\sqrt{n+8}}$.

В. 19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\cdot\sqrt[3]{n^2}}$.

В. 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n\cdot\ln n}$.

В. 21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

В. 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{n^2}$.

В. 23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-9)^{2n}}{2n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$.

В. 25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ (ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ)

1. Исследуйте сходимость знакоположительных рядов.

В. 1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{2^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$.

В. 2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+1}{2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n+1}$.

В. 3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$.

В. 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{5n+3}\right)^n$.

В. 5. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

В. 6. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$.

В. 7. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{e^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3n+1}$.

В. 8. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot\ldots 4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^4}$.

В. 9. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$.

В. 10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}$.

В. 11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n+1}{2n+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$.

В. 12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^4+n+3}$.

В. 13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{3^n(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+4}{n+1}\right)^n$.

В. 14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^5+n+5}}$.

В. 15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-1)^2}$.

В. 16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{3^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

В. 17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\ldots(2n+5)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

В. 18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(3n)!}$.

В. 19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n+1)^4}$.

В. 20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{7n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot3^{n+2}}{5^n}$.

В. 21. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{4}{7}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\dfrac{1}{n}$.

В. 22. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(7n-1)^5}$.

В. 23. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(5n-1)^2}$.

В. 24. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{8n}{5n+3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^4}{5n^4+1}$.

В. 25. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{9n+3}\right)^{\frac{n}{2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{15n^3+1}$.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

РАЗДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Вариант 1

1. Найти области определения функций:

1) $f(x)=\lg\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$.

2. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x}{\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2+2}-\sqrt[3]{x^2-2}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

3. Исследовать функции на непрерывность и построить их графики:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le\dfrac{\pi}{2},\\ 2x+\pi, & |x|>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ 2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Вариант 2

1. Найти области определения функций:

1) $f(x)=\lg(3-x^2)+\sqrt{x^2-4x-32}$; 2) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}}$.

2. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x-4}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$.

3. Исследовать функции на непрерывность и построить их графики:

1) $f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{калі } x\le -1,\\ \ln(1+x), & \text{калі } x>-1;\end{cases}$ 2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$.

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Производная и ее применение

Вариант 1

1. Найти производные:

1) $y=\sin\sqrt{x}\cdot\lg\frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $y=2\mathrm{arctg}\frac{1}{x^2+1}$; 3) $y=(\cos x)^{\sqrt[3]{x}}$;

4) $x=\arcsin t$, $y=\sqrt{1-t^2}$, y'_x – ?; 5) $y=\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^3$.

2. Провести полное исследование и построить график функции $y=x+\frac{1}{x^2}$.

3. Найти предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

4. Выполняются ли условия теоремы Лагранжа для функции $f(x)=\ln x$ на отрезке $[1;3]$? Если да, то найти соответствующую промежуточную точку ξ.

Вариант 2

1. Найти производные:

1) $y=2^x\lg(3x^2+1)$; 2) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}+x}}$; 3) $y=(3x+2)^{\arccos x}$;

4) $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$, y'_x – ?; 5) $y=\mathrm{arcctg}\sqrt[4]{1-x^2}$.

2. Провести полное исследование и построить график функции $y=-\frac{1}{1+x^2}$.

3. Найти предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4e^{-x}$.

4. Выполняются ли условия теоремы Лагранжа для функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[-2;2]$? Если да, то найти соответствующую промежуточную точку ξ.

РАЗДЕЛ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Вариант 1

1. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$; 2) $\int\limits_0^1 x e^{2x} dx$; 3) $\int\limits_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 1,\ 2y + 2x = 5$.

3. Вычислить длину дуги кривой $y = x\sqrt{x},\ x \in [0;1]$.

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox кривой $y = \sqrt{x} e^x,\ x \in [0;1]$.

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Вариант 2

1. Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$; 2) $\int\limits_1^e x \ln x dx$; 3) $\int\limits_1^2 x\sqrt{2-x} dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $y = x$, $x = 2$.

3. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,\ x \in [1;e]$.

4. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox кривой $y = x\sqrt{\ln x},\ x \in [1;e]$.

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$; 2) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции нескольких переменных

Вариант 1

1. Найти и изобразить область определения функции $z=\dfrac{1}{\sqrt{2xy}}$.

2. Найти частные производные функций:
1) $z=(x^2-3xy+2y^2)^2$; 2) $u=\ln(1-\sqrt{xy}\cdot z^2+xz)$.

3. Используя дифференциал, вычислить приближенно $1{,}002\cdot 2{,}003^3\cdot\sqrt{3{,}99}$.

4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $2x^2-\cos(yz^2)+e^{xz}=0$.

5. Найти производную функции $u=xy^2z^3$ в точке $M(3;2;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=5\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$.

6. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z=x^2-3xy+y^2-x$ в ее точке $M(1;1;-2)$.

7. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+xy+y^2-12x-3y$.

Вариант 2

1. Найти и изобразить область определения функции $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

2. Найти частные производные функций:
1) $z=\dfrac{2x-3y}{x^2-2xy}$; 2) $u=\arcsin\sqrt{x-y^2z^3}$.

3. Используя дифференциал, вычислить приближенно $\sqrt{1{,}03^2+1{,}97^3}$.

4. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $\arccos\sqrt{1-xyz}+\ln(xy)-z=0$.

5. Найти производную функции $z=\ln(x^3+y^2)$ в точке $M(1;1)$ по направлению вектора $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}$.

6. Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $z=x^3-4\sqrt{xy}-2xy^2$ в ее точке $M(2;2;-16)$.

7. Исследовать на экстремум функцию $z=3+2x-y-x^2+xy-y^2$.

РАЗДЕЛ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле
$$\int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(S)} xdxdy$, где (S) – треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(1,1)$ и $B(0,1)$.

3. Найти массу треугольника OAB, если $O(0,0)$, $A(1,-1)$, $B(1,1)$, а плотность равна $\rho(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$.

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле
$$\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(S)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, где (S) – часть круга радиуса a с центром в точке $O(0,0)$, лежащая в первой четверти.

3. Вычислить массу плоской фигуры, ограниченной лемнискатой $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, если ее плотность равна $\rho(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$.

РАЗДЕЛ 6. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вариант 1

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $x^2dy + ydx = 0$, $y(1) = e$; б) $y' = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$.

2. Решить дифференциальное уравнение $y'(2x - y) = x + 2y$.

3. Решить дифференциальное уравнение $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$.

4. Решить дифференциальное уравнение

$$(y^3 + \cos x)dx + (e^y + 3xy^2)dy = 0.$$

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2y' = 0$.

6. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 8y = 4x$.

Вариант 2

1. Решить дифференциальные уравнения:

а) $y^2y' + 2x - 1 = 0$, $y(1) = e$; б) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$.

2. Решить дифференциальное уравнение $xy' - y = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Решить дифференциальное уравнение $3y' - 2y = x^3y^{-2}$.

4. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx = \frac{2y}{x^3}dy.$$

5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 9y = 0$.

6. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 8y = \cos x$.

РАЗДЕЛ 7. РЯДЫ

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Вариант 1

1. Исследовать на сходимость следующие числовые ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n};\ 2)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln^2(3n+1)};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n(n+1)!}.$$

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n+2)}\cdot\frac{1}{2^n}.$$

3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^n}{n!}=0$.

4. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n^2}$ с точностью до α=0,01.

5. Найти области сходимости следующих степенных рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+5)}.$$

6. Разложить следующие функции в ряд по степеням x:

$$1)\ y=(1+x)e^{-x};\ 2)\ y=\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}.$$

Вариант 2

1. Исследовать на сходимость следующие числовые ряды:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+2}};\ 3)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln n}.$$

2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n}{n!}=0$.

4. Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!(2n+1)}$ с точностью до α=0,001.

5. Найти области сходимости следующих степенных рядов:

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3};\ 2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{2^n(n+1)}.$$

6. Разложить следующие функции в ряд по степеням x:

$$1)\ y=\frac{9}{20-x-x^2};\ 2)\ y=\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x}).$$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

РАЗДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. С помощью определения предела по Гейне определите, какой из следующих пределов не существует:

$$а)\ \lim_{x\to 3}\frac{2x+3}{3x+5};\ б)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2};\ в)\ \lim_{x\to\infty}\cos x;\ г)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5};$$

$$д)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{3x+1}{7x+8}.$$

1) *а*); **2)** *б*); **3)** *в*); **4)** *г*); **5)** *д*).

А2. Известно, что $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$. Найдите такое число $\delta>0$, что при $0<|x-x_0|=|x-1|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)|=\frac{1}{(x-1)^2}>E$, если $E=1000$.

1) $\frac{1}{5\sqrt{10}}$; **2)** $\frac{1}{\sqrt{10}}$; **3)** $\frac{1}{10}$; **4)** $\frac{1}{8\sqrt{10}}$; **5)** $\frac{1}{10\sqrt{10}}$.

А3. Вычислить предел $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

1) -6; **2)** 8; **3)** 6; **4)** 12; **5)** 10.

А4. Вычислите предел $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{5x^3+1}-\frac{x^2}{5x+3}\right)$.

1) $\frac{1}{25}$; **2)** $-\frac{1}{25}$; **3)** $\frac{6}{25}$; **4)** $\frac{3}{25}$; **5)** $\frac{11}{25}$.

А5. Вычислите предел $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+2x-6}{x^3-3x^2-2x+6}$.

1) $\frac{7}{11}$; **2)** $\frac{11}{7}$; **3)** $\frac{1}{11}$; **4)** $-\frac{7}{11}$; **5)** $-\frac{11}{7}$.

А6. Вычислите предел $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$.

1) 12; **2)** -2; **3)** 8; **4)** 10; **5)** 6.

А7. Вычислите предел $\lim_{x\to 3}\frac{3+5x-2x^2}{4x^2-8x-12}$.

1) $\frac{16}{7}$; **2)** $-\frac{7}{16}$; **3)** $-\frac{1}{16}$; **4)** $\frac{3}{16}$; **5)** $-\frac{3}{16}$.

А8. Какая из указанных бесконечно малых при $x \to 0$ функций будет бесконечно малой одного порядка по сравнению с функцией $\beta(x) = 3tgx$?

а) $\alpha(x) = \sin^2 x$; *б)* $\alpha(x) = 3x^2$; *в)* $\alpha(x) = 7\sqrt{x}$; *г)* $\alpha(x) = tg^2 x$; *д)* $\alpha(x) = tg5x$.

1) *а)*; **2)** *б)*; **3)** *в)*; **4)** *г)*; **5)** *д)*.

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x - 1}$.

Б2. Вычислите $e^{-6} \cdot \lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

Б3. Вычислите $\frac{6}{\pi} \cdot \lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$.

Б4. Используя метод замены бесконечно малых эквивалентными, вычислите $10 \cdot \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\ln(1+3x)}{(arctg\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$.

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ РАЗРЫВА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$.

1) 1; **2)** -2; **3)** -3; **4)** -1; **5)** 0.

А2. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(3+\frac{1}{1+7^{1/(1-x)}}\right)$.

1) 1; **2)** 3; **3)** 4; **4)** 5; **5)** 6.

А3. Дана функция $f(x) = x^2$. Найдите для заданного приращения аргумента $\Delta x = x - 1 = 0{,}01$ соответствующее приращение функции $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1)$.

1) $0{,}01$; **2)** $0{,}0101$; **3)** $0{,}0301$; **4)** $0{,}001$; **5)** $0{,}0201$.

А4. Найдите значение a, при котором функция $f(x)=\begin{cases}14\cdot 3^x, & x<0,\\ 2a+x, & x\geq 0\end{cases}$ непрерывна во всей области определения.

1) 4; **2)** 9; **3)** 6; **4)** 7; **5)** 8.

А5. Функция задана формулами $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, при\ x\neq 3,\\ A, при\ x=3.\end{cases}$

Найдите значение функции $A=f(3)$, чтобы доопределенная таким образом функция $f(x)$ была непрерывной при $x=3$.

1) 4; **2)** 5; **3)** 6; **4)** 7; **5)** 8.

А6. Найдите значение a, при котором функция f непрерывна в точке $x_0=-1$, если $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+x^3}, x\neq -1,\\ a, x=-1.\end{cases}$

1) 1; **2)** $\dfrac{1}{2}$; **3)** $\dfrac{1}{4}$; **4)** $-\dfrac{1}{2}$; **5)** $\dfrac{1}{3}$.

А7. Найдите значения a и b, при которых функция f непрерывна во всей области определения, если $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3, x\leq 0,\\ ax+b, 0<x<1,\\ \sqrt{x}, x\geq 1.\end{cases}$

1) $a=-2$, $b=-1$; **2)** $a=2$, $b=1$; **3)** $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-1$; **4)** $a=2$, $b=-1$; **5)** $a=-2$, $b=1$.

А8. Какая из указанных функций в точке $x_0=1$ имеет разрыв второго рода:

$а)$ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}(2x^2+3), x\leq 1,\\ 6-5x, x>1;\end{cases}$ $б)$ $f(x)=\begin{cases}-2x^2, x\leq 1,\\ 3x, x>1;\end{cases}$ $в)$ $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$;

$г)$ $f(x)=arctg\,\dfrac{1}{x-1}$; $д)$ $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{x}{1-x}}}$?

1) $а)$; **2)** $б)$; **3)** $в)$; **4)** $г)$; **5)** $д)$.

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Функция $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ не определена при $x=0$. Определите $f(0)$ так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна при $x=0$.

Б2. Дана функция $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$. Найдите скачок функции в точке, в которой имеется разрыв первого рода.

Б3. Дана функция $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}$. Найдите скачок функции в точке, в которой имеется разрыв первого рода.

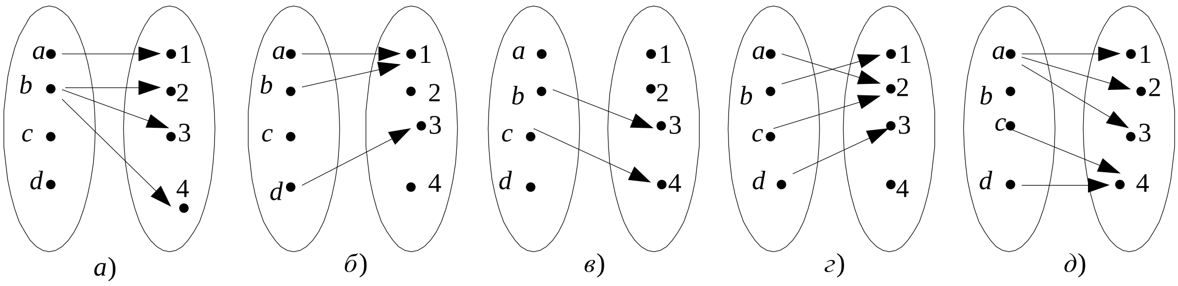
Б4. При каких значениях a функция $y(x)$ будет непрерывной, если
$$y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ a(x-1), & x>0.\end{cases}$$

ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. Какие из представленных на рисунке соответствий являются функциями?



1) а); **2)** б); **3)** в); **4)** г); **5)** д).

А2. Функция $X\xrightarrow{f}Y$ задана таблицей:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	25	20	15	10	5	0	–5	–10

Укажите ложное высказывание:

а) $f(0)+f(1)=f(-1)$; **б)** $f(1)+f(2)=f(3)$; **в)** $f(-3)-f(-2)=f(1)$;
г) $2f(-3)=50$; **д)** $f(2)\cdot f(4)=0$.

1) а); **2)** б); **3)** в); **4)** г); **5)** д).

А3. Дана функция $f(x)=\begin{cases}3^x, -1\le x<0,\\ 4,\ 0\le x<1,\\ 3x-1,\ 1\le x\le 3.\end{cases}$ Укажите ложное высказывание:

а) $f(2)=5$; **б)** $f(0)=4$; **в)** $f(0{,}5)=4$; **г)** $f(-0{,}5)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; **д)** $f(3)=7$.

1) а); **2)** б); **3)** в); **4)** г); **5)** д).

А4. Найдите область определения функции $y=\dfrac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$.

1) $D(f)=[-2;\ 2]$; **2)** $D(f)=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; **3)** $D(f)=[2;4]$;
4) $D(f)=[2;+\infty]$; **5)** $D(f)=[-2;\ 0]$.

А5. Какая из указанных функций является нечетной?

а) $y=x^2\cos 7x$; **б)** $y=|x|-5$; **в)** $y=\dfrac{1}{7}\left(5^x+5^{-x}\right)$; **г)** $y=2^{-x^2}$;

д) $y=7x-4\sqrt[3]{x}$.

1) а); **2)** б); **3)** в); **4)** г); **5)** д).

А6. Найдите множество значений функции $y=\sqrt{25-x^2}$.

1) $E(y)=[1;5]$; **2)** $E(y)=(0;5)$; **3)** $E(y)=[0;5]$; **4)** $E(y)=[0;4]$;
5) $E(y)=(0;4)$.

А7. Запишите в виде одного равенства сложную функцию, заданную цепочкой равенств $y=\arcsin u$, $u=\upsilon^2$, $\upsilon=\lg w$, $w=\dfrac{1}{x}$.

1) $y=\arcsin\lg\dfrac{1}{x^2}$; **2)** $y=\arcsin^2\lg\dfrac{1}{x}$; **3)** $y=\arcsin\lg^2 x$; **4)** $y=\arcsin^2\lg x$; **5)** $y=\arcsin\lg\dfrac{1}{x}$.

А8. Найдите функцию, обратную к функции $y=5^{\lg x}$.

1) $y=x^{\lg 5}\ (x>0)$; **2)** $y=x\cdot\lg 5\ (x>0)$; **3)** $y=\dfrac{x}{\lg 5}\ (x>0)$;

4) $y=\dfrac{\lg 5}{x}\ (x>0)$; **5)** $y=x^{\frac{1}{\lg 5}}\ (x>0)$.

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Найдите $\dfrac{1}{\pi}\cdot T$, где $\dfrac{1}{\pi}\cdot T$ наименьший положительный период функции $f(x)=2\cos\dfrac{x-\pi}{3}$.

Б2. Найдите длину промежутка, являющегося областью определения функции $f(x)=\sqrt{\lg\left(2-\sqrt{x-1}\right)}$.

Б3. Найдите длину промежутка, являющегося множеством значений функции $y=2\sin x-7$.

Б4. Найдите линейную функцию $f(x)=ax+b$, если $f(-4)=6$ и $f(4)=4$. В ответе укажите $4a+b$.

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. Задан общий член последовательности (x_n): $x_n = [\sqrt{n^2+n}]$. Найдите пятый член этой последовательности.

1) 4; **2)** 5; **3)** $5{,}4$; **4)** 6; **5)** $6{,}1$.

А2. Запишите формулу общего члена последовательности (x_n), если известны следующие первые ее члены: $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}, \ldots$.

1) $\frac{n^2}{5n-2}$; **2)** $\frac{n^2+2}{5n-2}$; **3)** $\frac{n^2+1}{5n-1}$; **4)** $\frac{n^2+1}{4n-1}$; **5)** $\frac{n^2+1}{5n-2}$.

А3. Какая из следующих последовательностей является неограниченной:

а) $\sin 1°, \sin 2°, \sin 3°, \ldots, \sin n°, \ldots$;

б) $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$;

в) $0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \ldots, (-1)^n + \frac{1}{n}, \ldots$;

г) $1, -2, 3, -4, \ldots, (-1)^{n+1} \cdot n, \ldots$;

д) $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n}{2n-1}, \ldots$?

1) *а*); **2)** *б*); **3)** *в*); **4)** *г*); **5)** *д*).

А4. Какая из следующих последовательностей (x_n) является убывающей, если:

а) $x_n = \log_2 n$; *б*) $x_n = n^2 + 4n + 1$; *в*) $x_n = \frac{2n+1}{6n+2}$; *г*) $x_n = ctg\,\frac{1}{n}$;

д) $x_n = \sqrt{n+7}$?

1) *а*); **2)** *б*); **3)** *в*); **4)** *г*); **5)** *д*).

А5. Дана последовательность с общим членом $x_n = \frac{3n-5}{9n+4}$. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$. Найдите число точек x_n, лежащих вне интервала $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1000}; \frac{1}{3} + \frac{1}{1000}\right)$.

1) 699; **2)** 703; **3)** 705; **4)** 697; **5)** 709.

А6. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$, если $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Найдите номер члена, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - 2| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 0{,}01$.

1) 85; **2)** 80; **3)** 95; **4)** 100; **5)** 90.

А7. Какая из следующих последовательностей (x_n) является бесконечно малой, если:

$$а)\ x_n = 2n - \frac{n+1}{n-2};\ б)\ x_n = \frac{n^2+n}{n+2};\ в)\ x_n = \frac{1-(-1)^n}{n};\ г)\ x_n = 2^n - n^{1000};$$

$д)\ x_n = (2n+1)^5$?

1) $а)$; **2)** $б)$; **3)** $в)$; **4)** $г)$; **5)** $д)$.

А8. Найдите предел последовательности $\left(\dfrac{2n^2+n}{n+3n^2+1}\right)$.

1) 2; **2)** $\dfrac{2}{3}$; **3)** 3; **4)** $\dfrac{3}{2}$; **5)** 5.

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - n$.

Б2. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$.

Б3. Найдите $6\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \sqrt[3]{n^2-n^3} + n$.

Б4. Найдите $8\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_n = \dfrac{1}{2n}\cos n^3 - \dfrac{3n}{6n+1}$.

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. Найдите производную функции $y = \arccos\sqrt{x}$.

1) $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$; **2)** $\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}}$; **3)** $\frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$; **4)** $-\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$; **5)** $\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

А2. Найдите сумму значений производной функции $y = \arcsin(\cos x)$ в точках $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{6}$.

1) 2; **2)** -2; **3)** 0; **4)** 3; **5)** -3.

А3. Найдите производную функции $y = (\sqrt{tgx})^{x+1}$.

1) $(tgx)^{\frac{x+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln tgx + \frac{x+1}{\sin x}\right)$; **2)** $(tgx)^{\frac{x+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln tgx + \frac{x+1}{\sin 3x}\right)$;

3) $(tgx)^{\frac{x+1}{2}}\left(\frac{1}{2}\ln tgx + \frac{x+1}{\sin 2x}\right)$; **4)** $(tgx)^{\frac{x+1}{2}}\left(\ln tgx - \frac{x+1}{\sin 2x}\right)$;

5) $(tgx)^{\frac{x+1}{2}}\left(\ln tgx + \frac{x+1}{\sin 2x}\right)$.

А4. Найдите производную n-го порядка функции $y = \sin x$.

1) $\sin(x + n\pi)$; **2)** $\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$; **3)** $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$; **4)** $\sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$; **5)** $\sin\left(x + n\frac{\pi}{3}\right)$.

А5. Функция задана параметрически: $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$ Найдите производную второго порядка от y по x.

1) $\frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^2}$; **2)** $\frac{2}{e^t(\cos t + \sin t)^3}$; **3)** $\frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^4}$;

4) $\frac{2}{e^t(\sin t - \cos t)^3}$; **5)** $\frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$.

А6. Найдите производную $y' = \frac{dy}{dx}$ от неявной функции y, если $xy - \ln y = 0$.

1) $\dfrac{2y}{1-xy}$; **2)** $\dfrac{y^3}{1-xy}$; **3)** $\dfrac{y^2}{1-xy}$; **4)** $\dfrac{y^2}{1+xy}$; **5)** $\dfrac{y^2}{xy-1}$.

А7. Найдите ординату точки пересечения оси Oy с касательной к кривой $y = x^3 - 3x + 2$ в точке $(2;4)$.

1) -12; **2)** -13; **3)** -14; 4) -15; **5)** -16.

А8. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется формулой $v = 3t + t^2$. Найдите ускорение тела через 4 секунды после начала движения.

1) 8; **2)** 9; **3)** 10; **4)** 11; **5)** 12.

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Используя понятие дифференциала, найдите приближенное значение $\sqrt[3]{26{,}19}$.

Б2. Найдите произведение абсциссы и ординаты точки графика функции $f(x) = x^2 - 7x + 3$, касательная в которой параллельна прямой $y = 5x + 2$.

Б3. Найдите $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, если $f(t) = \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$.

Б4. Используя правило Лопиталя, вычислите $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

РАЗДЕЛ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. Укажите первообразную функции $f(x)=\dfrac{1+\ln(x+1)}{x+1}$.

а) $F(x)=\ln\left(1+\ln(x+1)\right)+C$; **б)** $F(x)=\ln(x+1)+\ln\ln(x+1)+C$;

в) $F(x)=-(x+1)+\ln^2(x+1)+C$; **г)** $F(x)=\ln(x+1)+\dfrac{1}{2}\ln^2(x+1)+C$;

д) $F(x)=\ln\left((x+1)\ln(x+1)\right)+C$.

1) а); **2)** б); **3)** в); **4)** г);**5)** д).

А2. Найдите $\int\dfrac{x^4\cdot\sqrt[3]{x}-5\sqrt[4]{x}}{x^3}dx.$

1) $7x^{\frac{5}{3}}+\dfrac{20}{7}x^{\frac{7}{4}}+C$; **2)** $\dfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\dfrac{7}{20}x^{\frac{5}{4}}+C$; **3)** $\dfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\dfrac{20}{7}x^{\frac{7}{4}}+C$;

4) $-\dfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\dfrac{20}{9}x^{-\frac{9}{5}}+C$; **5)** $\dfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\dfrac{20}{7}x^{-\frac{7}{4}}+C$.

А3. Найдите $\int xe^{-5x}dx.$

1) $e^{-5x}-5xe^{-5x}+C$; **2)** $\dfrac{e^{-5x}}{125}(1-25x)+C$; **3)** $-\dfrac{e^{-5x}}{25}(1+5x)+C$;

4) $\dfrac{e^{-5x}}{25}(1-5x)+C$; **5)** $\dfrac{e^{-5x}(25-x)}{125}+C$.

А4. Найдите $\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{x+1}.$

1) $2\left(\sqrt{x}+\ln(1+x)\right)+C$; **2)** $-2(\mathrm{arctg}x+\ln\sqrt{x})+C$; **3)** $2(\sqrt{x}-\mathrm{arctg}x)+C$;

4) $-2(\ln(1+x)+\sqrt{x})+C$; **5)** $\sqrt{x}+2\mathrm{arctg}x+C$.

А5. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx.$

1) 1; **2)** $\dfrac{2}{3}$; **3)** $\dfrac{3}{2}$; **4)** 0; **5)** π.

А6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2; y=4; x=3.$

1) 3; **2)** $\dfrac{10}{3}$; **3)** 2,5; **4)** $\dfrac{7}{3}$; **5)** $\dfrac{14}{5}$.

А7. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $y=0$, $x=2$, $x=1+e^2$.

1) $0{,}5\pi$; **2)** π; **3)** $1{,}5\pi$; **4)** 2π; **5)** $2{,}5\pi$.

А8. Найдите путь, пройденный точкой за отрезок времени от $t=1$ до $t=4$ и движущейся прямолинейно со скоростью $v(t)=2t^2-3t$ (расстояние дается в метрах, время – в секундах).

1) 20; **2)** 19,5; **3)** 19; **4)** 18,5; **5)** 18.

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Вычислите $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$.

Б2. Найдите несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Б3. Вычислите длину кривой $x=\ln\cos y$ между $y=0$ и $y=\dfrac{\pi}{3}$.

Б4. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найдите интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x}$.

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. Дана функция $f(x,y)=\dfrac{x^2+y}{y^2+x}$. Найдите $f(3,-3)$.

1) $\dfrac{1}{3}$; **2)** $\dfrac{1}{4}$; **3)** $\dfrac{1}{5}$; **4)** $\dfrac{1}{2}$; **5)** $\dfrac{1}{6}$.

А2. Даны следующие функции:

а) $z=5-x+3y$; **б)** $z=\dfrac{5}{x^2+y^2}$; **в)** $z=\arccos(x+y)$; **г)** $z=\dfrac{xy}{x-y}$;

д) $z=\dfrac{x}{x^2-y^2}$.

Для какой из указанных функций вся плоскость xOy, кроме точки $(0;0)$, будет областью определения?

1) а); **2)** б); **3)** в); **4)** г); **5)** д).

А3. Найдите приращение функции $z=x^2-xy+y^2$ при переходе от точки $M_0(2;2)$ к точке $M_1(2,1;1,9)$.

1) 0,06; **2)** 0,05; **3)** 0,03; **4)** 0,08; **5)** 0,04.

А4. Найдите частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

1) $\dfrac{x}{x^2+y^2}$; **2)** $\dfrac{x}{x^2-y^2}$; **3)** $-\dfrac{x}{x^2-y^2}$; **4)** $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$; **5)** $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

А5. Найдите частную производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ функции $u=z^3e^{x-2y}$.

1) $-z^3e^{x-2y}$; **2)** $3z^2e^{x-2y}$; **3)** z^2e^{x-2y}; **4)** z^3e^{x-2y}; **5)** $-2z^3e^{x-2y}$.

А6. Найдите частную производную $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$ функции $u=\sin(3x-2y)$.

1) $4\cos(3x-2y)$; **2)** $-10\cos(3x-2y)$; **3)** $-12\cos(3x-2y)$;

4) $10\cos(3x-2y)$; **5)** $-4\cos(3x-2y)$.

А7. Найдите полный дифференциал функции $u=r^2\cos 2\varphi$.

1) $2r(\cos\varphi dr+r\sin 2\varphi)d\varphi$; **2)** $2r(\cos 2\varphi dr-r\sin 2\varphi d\varphi)$;

3) $2r(\cos\varphi-r\sin\varphi)d\varphi$; **4)** $r(\cos 2\varphi dr-\sin 2\varphi)d\varphi$;

5) $r(\cos 2\varphi dr+\sin 2\varphi)d\varphi$.

А8. Найдите $\frac{dz}{dt}$, если $z=\frac{x}{y}$, где $x=e^t$, $y=\ln t$.

1) $\frac{e^t(t\ln t+1)}{t\ln^2 t}$; **2)** $\frac{e^t(t\ln t+1)}{t\ln t}$; **3)** $\frac{e^t(t\ln^2 t+1)}{t\ln^2 t}$; **4)** $\frac{e^t(t\ln^2 t-1)}{t\ln^2 t}$; **5)** $\frac{e^t(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$.

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Найдите значение частной производной u'_y функции $u=xe^y$ в точке $A(2,0)$.

Б2. Вычислите значение полного дифференциала функции $z=\frac{y}{x}$ при $x=2$, $y=1$, $dx=0{,}1$, $dy=0{,}2$.

Б3. Вычислите приближенно $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$.

Б4. Найдите $x+y$, если (x,y) – точка минимума функции $z=x^2+y^2-4y+4$.

РАЗДЕЛ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. Вычислите повторный интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{1-x} (x^2 - y)dy$.

1) $-\frac{13}{81}$; **2)** $\frac{12}{35}$; **3)** $\frac{15}{74}$; **4)** $-\frac{11}{96}$; **5)** $-\frac{15}{74}$.

А2. Перемените порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

1) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_2^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$; **2)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{-x} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x+x^2}} f(x,y)dy$; **4)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{x^2-2x}} f(x,y)dy$;

5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

А3. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$, если область D ограничена параболами $x = y^2$, $y = x^2$.

1) $-\frac{1}{302}$; **2)** $-\frac{1}{406}$; **3)** $-\frac{1}{208}$; **4)** $-\frac{1}{504}$; **5)** $-\frac{1}{602}$.

А4. Перейти к полярным координатам r, φ и расставить пределы интегрирования по новым переменным в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$.

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rdr$; **2)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) rdr$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$; **4)** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) dr$;

5) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr$.

А5. Перейти к полярным координатам и вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, где область D ограничена линиями
$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ $(y \ge 0)$.

1) $\frac{15}{6}$; **2)** $\frac{16}{9}$; **3)** $\frac{14}{3}$; **4)** $\frac{12}{5}$; **5)** $\frac{18}{7}$.

А6. Найдите площадь фигуры, ограниченную линиями $y=-2$, $y=x+2$, $y=2$, $y^2=x$.

1) $\frac{46}{3}$; **2)** $\frac{40}{3}$; **3)** $\frac{16}{3}$; **4)** $\frac{25}{3}$; **5)** $\frac{56}{3}$.

А7. Вычислите площадь фигуры, ограниченную линией $r=4\cos 2\varphi$.

1) 6π; **2)** $\frac{9\pi}{2}$; **3)** 2π; **4)** 8π; **5)** 18π.

А8. Найдите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры, ограниченной параболами $y=2x-x^2$ і $y=x^2$, если плотность в каждой точке численно равна ее ординате.

1) $\frac{59}{420}$; **2)** $\frac{79}{420}$; **3)** $\frac{69}{420}$; **4)** $\frac{19}{420}$; **5)** $\frac{89}{420}$.

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, где D – треугольник ABC с вершинами $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$.

Б2. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=2Rx$.

Б3. Вычислите площадь части параболоида $2z=x^2+y^2$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=1$.

Б4. Вычислите объем тела, ограниченного параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$.

РАЗДЕЛ 6. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. Какое из следующих уравнений не является дифференциальным уравнением:

а) $(y-1)^2dx+(1-x^3)dy=0$; **б)** $y'=\dfrac{y\ln y}{\sqrt{1-x^2}arc\sin x}$;

в) $(x+2)(y^2+1)+y^2e^x=0$; **г)** $y'-\dfrac{y}{x}=3x$; **д)** $y'''=\dfrac{1}{x^3}$?

1) а); **2)** б); **3)** в); **4)** г); **5)** д).

А2. Какое из следующих уравнений является дифференциальным уравнением четвертого порядка:

а) $y''-3y'+2y-4=0$; **б)** $x(1+x)y'-(1+2x)=0$;

в) $y^{(IV)}-16y''=0$; **г)** $y'''-6y''+11y=0$; **д)** $y'=-\dfrac{x}{y}$?

1) а); **2)** б); **3)** в); **4)** г); **5)** д).

А3. Даны следующие дифференциальные уравнения:

а) $y''=-5x$; **б)** $y''=-8x$; **в)** $y''=-x^2$; **г)** $y''=-6x$; **д)** $y''=-6x^2$.

Решением какого из указанных дифференциальных уравнений является функция $y=-x^3$?

1) а); **2)** б); **3)** в); **4)** г); **5)** д).

А4. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

$x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$.

1) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$; **2)** $\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=C$;

3) $\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1+y^2}}=C$; **4)** $\sqrt{1+2x^2}+\sqrt{1+2y^2}=C$; **5)** $\sqrt{1+y^4}=C+\sqrt{1+x^4}$.

А5. Найдите частное решение дифференциального уравнения $(x^2+4)y'-2xy=0$, удовлетворяющее условию $y=5$ при $x=1$. В ответе укажите значение этого решения в точке $x=4$.

1) 16; **2)** 18; **3)** 24; **4)** 32; **5)** 20.

А6. Найдите частное решение, удовлетворяющее указанным условиям: $y'+ytgx=\cos^2 x$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$. В ответе укажите значение этого решения в точке $x=\dfrac{\pi}{6}$.

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **2)** $\sqrt{3}$; **3)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$; **4)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **5)** $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

А7. Решите задачу Коши при указанных начальных условиях: $y''' = \frac{1}{x}$; $y(1) = 1$; $y'(1) = 2$; $y''(1) = -2$.

В ответе укажите значение решения в точке $x = e$.

1) $-\frac{9}{4}$; **2)** $5e - \frac{5e^2}{4} - \frac{9}{4}$; **3)** $-\frac{7e^2}{4} + 5e - \frac{9}{4}$; **4)** $-\frac{7e^2}{4} + 5e$; **5)** $\frac{e^2}{2}$.

А8. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 3y = 0$. Найдите сумму квадратов корней его характеристического уравнения.

1) 5; **2)** 17; **3)** 13; **4)** 10; **5)** 20.

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Найдите решение задачи Коши $y' + y = x + 2$, $y(0) = 2$. В ответе укажите значение этого решения в точке $x = 1$.

Б2. Найдите решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$. В ответе укажите значение этого решения в точке $x = 1$.

Б3. Дано дифференциальное уравнение $y'' + 9y = 9\cos 3x + 16\sin 3x$. Найдите $A + B$, если $Y = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$ − частное решение исходного дифференциального уравнения.

Б4. Найдите решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 1 - x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$. В ответе укажите значение этого решения в точке $x = -1$.

РАЗДЕЛ 7. РЯДЫ

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Часть А

К каждому заданию части **А** предложено пять ответов, из которых только один является верным. Выполните задание и укажите номер верного ответа.

А1. Задана формула общего члена ряда: $a_n = \dfrac{3n-2}{n^3}$. Запишите соответствующий ряд в развернутом виде.

1) $1+\dfrac{4}{8}+\dfrac{9}{27}+\dfrac{12}{64}+\ldots$; **2)** $1+\dfrac{4}{8}+\dfrac{5}{27}+\dfrac{7}{64}+\ldots$; **3)** $1+\dfrac{5}{8}+\dfrac{6}{27}+\dfrac{7}{256}+\ldots$;

4) $1+\dfrac{5}{8}+\dfrac{7}{27}+\dfrac{9}{64}+\ldots$; **5)** $1+\dfrac{4}{8}+\dfrac{7}{27}+\dfrac{10}{64}+\ldots$.

А2. Запишите простейшую формулу общего члена ряда $2+\dfrac{1}{7}+\dfrac{4}{17}+\dfrac{3}{31}+\dfrac{6}{49}+\ldots$.

1) $a_n = \dfrac{n+1}{2n^2-1}$; **2)** $a_n = \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{2n^2+1}$; **3)** $a_n = \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{2n^2-1}$; **4)** $a_n = \dfrac{n+(-1)^{n-1}}{3n^2-1}$;

5) $a_n = \dfrac{n^2+(-1)^{n-1}}{2n^2-1}$.

А3. Найдите n-ю частичную сумму и сумму ряда $\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}+\ldots$.

1) $S_n = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n+3}$, $S=\dfrac{1}{3}$; **2)** $S_n = \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3}$, $S=\dfrac{1}{3}$; **3)** $S_n = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}$, $S=\dfrac{1}{2}$;

4) $S_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+2}$, $S=\dfrac{1}{2}$; **5)** $S_n = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n+2}$, $S=\dfrac{1}{3}$.

А4. Какой из указанных рядов расходится?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{7^n}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+1}{5^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+4^n}{4^n}$; *г)* $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}-\dfrac{1}{125}+\ldots$; *д)* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{4^n}$

1) *а)*; **2)** *б)*; **3)** *в)*; **4)** *г)*; **5)** *д)*.

А5. Предполагается исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^3-1}}$ с помощью признака сравнения в предельной форме. Какой ряд необходимо взять для этого?

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$; **2)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$; **3)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$; **4)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; **5)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^5}}$.

А6. Заданы два ряда: (A) и (B): $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{4^n}$ (A); $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!}{n!}$ (B). Исследуйте на сходимость каждый из них.

1) $\begin{cases}(A)\ \text{сходится},\\(B)\ \text{сходится};\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}(A)\ \text{сходится},\\(B)\ \text{расходится};\end{cases}$ **3)** $\begin{cases}(A)\ \text{расходится},\\(B)\ \text{расходится};\end{cases}$

4) $\begin{cases}(A)\ \text{расходится},\\(B)\ \text{сходится};\end{cases}$ **5)** нет правильного ответа.

А7. Какой из указанных рядов сходится?

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3n^3-1}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{3n}{n+5})^n\cdot(\dfrac{n+2}{n+3})^{n^2}$; *г)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^5(\dfrac{3n+2}{4n+3})^n$.

1) *а)*; **2)** *б)*; **3)** *в)*; **4)** *г)*; **5)** *д)*.

А8. Заданы два ряда: (A) и (B). Исследуйте, сходится или абсолютно, или условно, или расходится каждый из них.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{n-1})^3\ \ (A);\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n}{3n^2+1}\ \ (B).$$

1) $\begin{cases}(A)\ \text{сходится условно},\\(B)\ \text{сходится условно};\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}(A)\ \text{сходится абсолютно},\\(B)\ \text{сходится абсолютно};\end{cases}$

3) $\begin{cases}(A)\ \text{сходится условно},\\(B)\ \text{расходится};\end{cases}$ **4)** $\begin{cases}(A)\ \text{расходится},\\(B)\ \text{сходится условно};\end{cases}$

5) $\begin{cases}(A)\ \text{сходится абсолютно},\\(B)\ \text{сходится условно}.\end{cases}$

Часть Б

Каждое задание части **Б** решите, получите ответ и укажите его.

Б1. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-4)^n}{2^n(n+1)}$.

Б2. Найдите радиус сходимости ряда Маклорена для функции $f(x)=\dfrac{3x+8}{(2x-3)(x^2+4)}$.

Б3. Вычислите интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\dfrac{\sin x}{x}dx$ с точностью до $0{,}00001$.

Б4. Найдите производную 11-го порядка функции $f(x)=x^5\cos\dfrac{x}{2}$ в точке $x=0$.

IV. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. – СПб. : Лань, 2016. –492 с.
2. Бугров, Я. С. Высшая математика в 3 т. : учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Люберцы : Юрайт, 2016. – Т. 3 : в 2 кн. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – 507 с.
3. Бугров, Я. С. Высшая математика: в 3 т. : учебник для академического бакалавриата / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Люберцы : Юрайт, 2016. – Т. 1: в 2 кн. Дифференциальное и интегральное исчисление. – 501 с.
4. Драгомиров, П. Н. Краткий курс математического анализа : учеб. пособие / П. Н. Драгомиров. – СПб. : Лань, 2016. – 736 с.
5. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М. : МЦНМО, 2018. – Ч. 1. – 564 с.
6. Зорич, В. А. Математический анализ / В. А. Зорич. – М. : МЦНМО, 2017. – Ч. 2. – 676 с.
7. Кастрица, О. А. Высшая математика для экономистов : учеб. пособие / О. А. Кастрица. – М. : Инфра-М, 2018. – 104 с.
8. Краснова, С. А. Математический анализ для экономистов : в 2 ч. / С. А. Краснова, В. А. Уткин. – Люберцы : Юрайт, 2016. – Ч. 1: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – 298 с.
9. Краснова, С. А. Математический анализ для экономистов : в 2 ч. / С. А. Краснова, В. А. Уткин. – Люберцы : Юрайт, 2016. – Ч. 2: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. – 315 с.
10. Кремер, Н. Ш. Высшая математика для экономистов : учебник / Н. Ш. Кремер и др. – М. : Юнити, 2017. – Ч. 2. – 448 с.
11. Леваков, А. А. Математический анализ : учеб. пособие / А. А. Леваков. – Минск : БГУ, 2014. – 383 с.
12. Лурье, И. Г. Высшая математика. Практикум : учеб. пособие / И. Г. Лурье, Т. П. Фунтикова. – М. : Вузовский учебник, 2018. – 256 с.
13. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике (полный курс) / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2017. – 608 с.
14. Хинчин, А. Я. Краткий курс математического анализа / А. Я. Хинчин. – М. : Ленанд, 2018. – 632 с.
15. Шилинец, В. А. Практикум по высшей математике : учеб.-метод. пособие: в 4 ч. / В. А. Шилинец, П. И. Кибалко, В. В. Подгорная. – Минск : Междунар. ун-т «МИТСО», 2018. – Ч. 2. – 232 с.
16. Шипачев, В. С. Математический анализ. Теория и практика: учеб. пособие / В. С. Шипачев. – М. : Инфра-М, 2018. – 416 с.
17. Ячменёв, Л. Т. Высшая математика : учебник / Л. Т. Ячменёв. – М.: Риор, 2018. – 752 с.