УДК 378.147

С. Я. ЖУКОВИЧ

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ НА ДИСТАНЦИОННОМ КУРСЕ

*Предложена математическая модель обучения на основе теории управления в виде неоднородного линейного дифференциального уравнения. На основе коэффициентов усвоения и забывания, определенных с помощью специальных тестов, можно прогнозировать в некотором приближении уровень текущих знаний как отдельного обучаемого, так и группы или потока студентов.*

S. ZHUKOVICH

# MATHEMATICAL MODELING OF THE LEARNING PROCESS DURING A DISTANCE COURSE

*A mathematical model of learning based on the theory of control in the form of an inhomogeneous linear differential equation is proposed. On the basis of the coefficients of assimilation and forgetting, determined with the help of special tests, it is possible to predict, with some approximation, the current knowledge levels both of individual trainees and of student groups or streams.*

**ЖУКОВИЧ Сергей Яковлевич,**
исполняющий обязанности заведующего кафедрой информационных технологий Международного университета «МИТСО»

**Введение**

Согласно докладу ООН за 2017 год, Республика Беларусь заняла 50-е место по уровню индекса человеческого развития (0,798), находясь в верхней строке группы стран с высоким уровнем индекса человеческого развития и обгоняя страны бывшего СССР, кроме стран Балтии. По индексу уровня образования стран мира Республика Беларусь в 2017 году заняла 26-е место, а по уровню расходов на образование – 83-е место, тратя на образовательную сферу всего 4,5 % ВВП [1].

Эти данные говорят о высокой эффективности традиционной системы образования Республики Беларусь. Однако наша страна нуждается в новых видах образовательных услуг, которые должны развивать информационные и коммуникационные технологии. Таким видом образовательной услуги может стать дистанционная образовательная услуга. Существуют различные формы дистанционного обучения – онлайн и офлайн.

Однако в таких формах обучения преподаватель находится удаленно и не имеет полной обратной связи с обучаемым, что может негативно отразиться на качестве образовательной услуги [2].

Возникает вопрос, каким образом наша страна может повысить конкурентоспособность на новом для нее рынке *e-learning*? Ответом может стать создание ряда дистанционных курсов, основанных на инновационной методике с использованием экономико-математического и инструментального моделирования процесса обучения с обратной связью и личностно-ориентированного подхода.

**1. Математическая модель процесса обучения на дистанционном курсе на основе теории управления**

Под управлением будем понимать процесс организации такого целенаправленного воздействия на объект, в результате которого этот объект переводится в требуемое состояние [3].

Задача обучения может быть сформулирована как задача управления. В этом случае обучаемый выступает в качестве объекта управления, а обучающий или обучающая система – в качестве источника управления. На рисунке 1 (см. с. 78) приведена схема взаимодействия обучаемого и обучающей системы [3].

Объект управления является объектом обучения (обучаемый на учебном курсе), а устройство управления – обучающей системой. Обучающая система информируется о состоянии среды $X$ с помощью датчика $D_X$. $X^1$ – информация о среде $X$, получаемая обучающей системой. $Z$ – состояние обучаемого, измеряемое датчиком $D_z$, на выходе которого имеется $Z^1$ – информация об этом состоянии, получаемая обучающей системой в виде результатов компьютерного тестирования обучаемого в ответ на управление $U$. Очевидно, что $X^1 \neq X$ и $Z^1 \neq Z$ в силу того, что датчики измеряют только то, что используется в процессе управления. Однако $X^1 \in X$ и $Z^1 \in Z$, т. е. получаемая информация в какой-то мере (но далеко не полностью) отражает действительное состояние объекта и среды.

Задача состоит в том, чтобы организовать оптимальное управление $U^*$, изменяющее состояние $Z$ обучаемого таким образом, чтобы выполнялись поставленные цели обучения $Z^*$ в рамках имеющихся ресурсов $R$ [3].

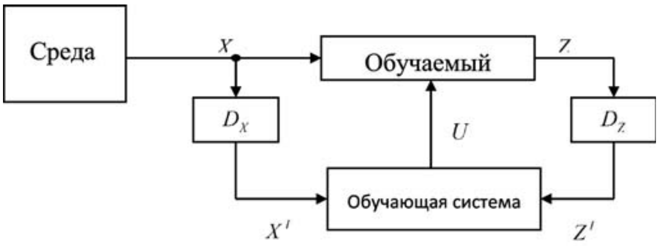



Рисунок 1 – Схема взаимодействия обучаемого и обучающей системы

С достаточной точностью можно аппроксимировать экспериментальные данные, установленные Эббингаузом, с помощью экспоненты с отрицательным показателем (если брать характерное время для процесса обучения – сутки и более). Большинство исследователей выражают эту зависимость с помощью формулы:

$$Z = Z_0 \exp(-kt), \tag{1}$$

где $Z = Z(t)$ – текущий уровень (объем) усвоенного учебного материала (в академических часах);
$Z_0$ – начальный уровень усвоенного учебного материала при $t = t_0$;
$k$ – коэффициент забывания, который показывает, какую часть от текущего уровня усвоенного учебного материала $Z$ обучаемый забывает в среднем за сутки.

Считая время непрерывным, продифференцируем (1) по времени $t$ и получим однородное линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dZ}{dt} = -kZ. \tag{2}$$

Уравнение (2) описывает процесс забывания вследствие ненулевых начальных условий. В задаче обучения это соответствует постепенному забыванию ранее усвоенного уровня учебного материала $Z_0$. Разным коэффициентам забывания соответствуют различные кривые забывания (рисунок 2).

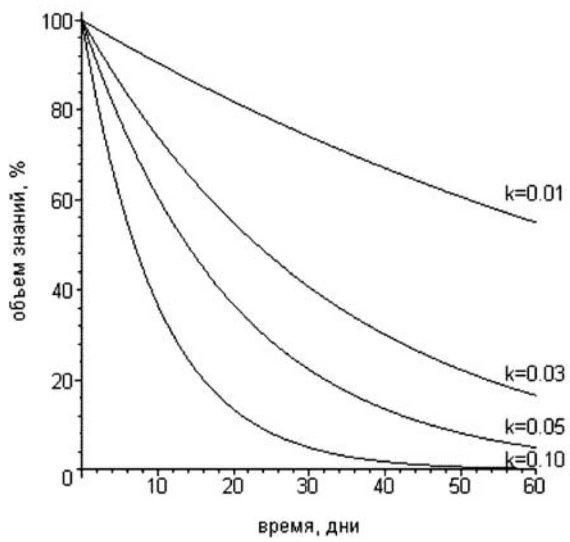



Рисунок 2 – Кривые забывания при разных коэффициентах $k$

Пусть дополнительный объем учебного материала, усвоенный обучаемым за время $\Delta t$, равен $f(t)\Delta t$, тогда процесс обучения описывается с помощью неоднородного линейного дифференциального уравнения [4]:

$$\frac{dZ}{dt} = -kZ + f(t). \tag{3}$$

Решение уравнения (3) представляется в виде

$$Z = Z_0 e^{-\int_0^t k(v)dv} + e^{-\int_0^t k(v)dv} \int_0^t f(\tau) e^{\int_0^t k(v)dv} d\tau. \tag{4}$$

Правая часть уравнения (4) представляет собой сумму свободного и вынужденного движений системы. Вынужденное движение происходит вследствие внешнего воздействия при нулевых начальных условиях. Вынужденное движение отлично от нуля только после приложения внешнего воздействия. Внешнее воздействие является управлением в виде учебной нагрузки, подаваемой в определенные промежутки времени.

В системах с управлением функцию управления разбивают на программное управление и управление с обратной связью [5].

Нагрузку на учебном курсе $U(t)$ можно представить в виде суммы [6]

$$U(t) = u_0(t) + u_2(t) + u_4(t),$$

где $u_0$ – программное управление, задаваемое в виде заранее запланированной нагрузки, осуществляемой преподавателем онлайн (в академических часах);
$u_2$ – программное управление в виде нагрузки для самостоятельного обучения;
$u_4$ – программное управление на дистанционном курсе в виде просмотра обучаемым видеолекций.

Если учесть, что в процессе обучения присутствует управление с обратной связью в виде повторения уже пройденного материала, объем усвоенных знаний из (3) можно составить из шести частей [7]:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{5} k_i u_i(t), \tag{5}$$

где $k_0$ – коэффициент усвоения учебного материала при обучении с помощью преподавателя;
$u_1$ – управление процессом повторения посредством контрольных и самостоятельных работ после обучения преподавателем ($u_1$ является управлением с обратной связью);
$k_1$ – коэффициент усвоения для управления $u_1$;
$k_2$ – коэффициент усвоения для управления $u_2$;
$u_3$ – управление с обратной связью при повторении материала, изученного обучаемым самостоятельно;
$k_3$ – коэффициент усвоения для управления $u_3$;
$k_4$ – коэффициент усвоения для управления $u_4$;
$u_5$ – управление с обратной связью при повторении материала, изученного обучаемым посредством видеолекций;
$k_5$ – коэффициент усвоения для управления $u_5$.

Все коэффициенты являются безразмерными и изменяются в пределах от нуля до единицы ($0 \le k, k_i \le 1$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

Таким образом, процесс обучения на дистанционном курсе можно описать с помощью неоднородного линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{dZ}{dt} = -kZ + \sum_{i=0}^{5} k_i u_i(t). \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) представляется в виде

$$Z(t) = Z_0 e^{-\int_0^t k(v)dv} + e^{-\int_0^t k(v)dv} \int_0^t \sum_{i=0}^{5} k_i u_i(\tau) e^{\int_0^t k(v)dv} d\tau. \qquad (7)$$

Кривая обучения для непрерывного равномерного программного управления, полученная по формуле (7), представлена на рисунке 3 ($u_0$ = 0,852, $k$ = 0,03).

Управление в реальном процессе обучения является кусочно-непрерывным.

Кривые обучения для разных коэффициентов забывания и усвоения при кусочно-непрерывным равномерном программном управлении описаны в [7] и представлены на рисунках 4 и 5.

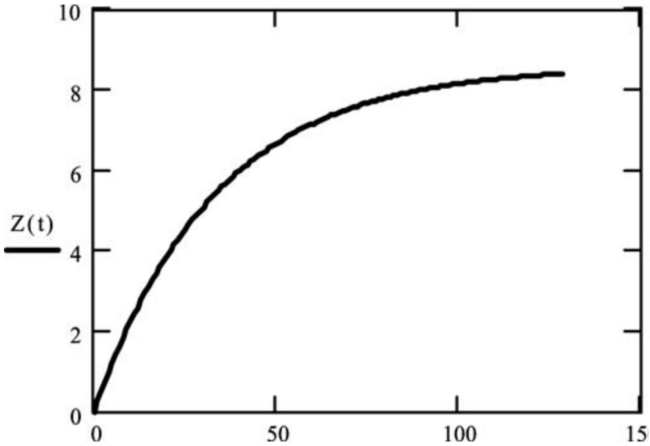
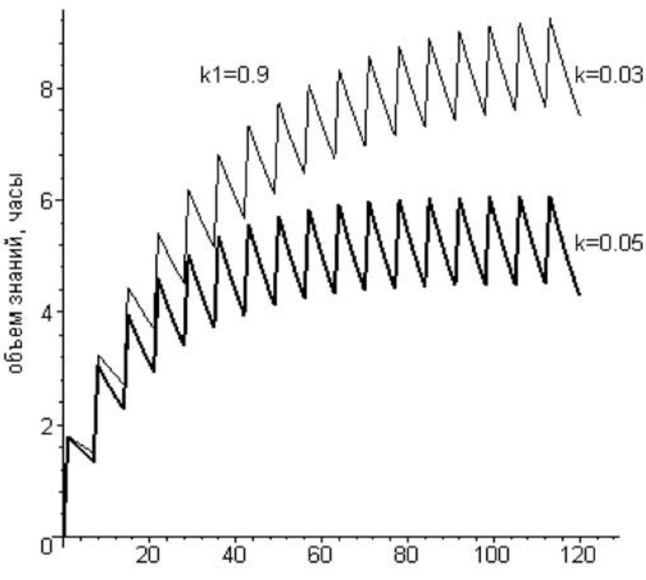



Рисунок 3 – Кривая обучения для непрерывного программного управления




Кривая 1: $k$ = 0,03, кривая 2: $k$ = 0,05
Рисунок 4 – Кривые обучения ($k_0$ = 0,9) для разных коэффициентов забывания $k$

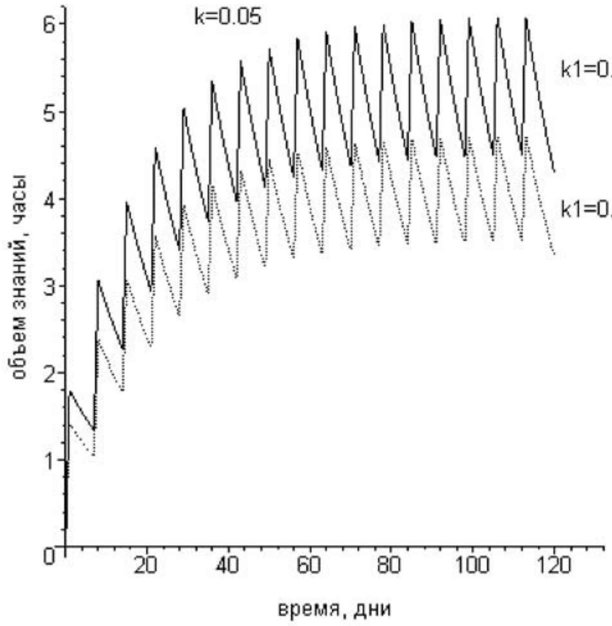



Рисунок 5 – Кривые обучения ($k$ = 0,05) для разных коэффициентов усвоения $k_0$
Кривая 1: $k_0$ = 0,9, кривая 2: $k_0$ = 0,7

Проведем аппроксимацию нижней кривой на рисунке 4 с помощью полинома (рисунок 6):

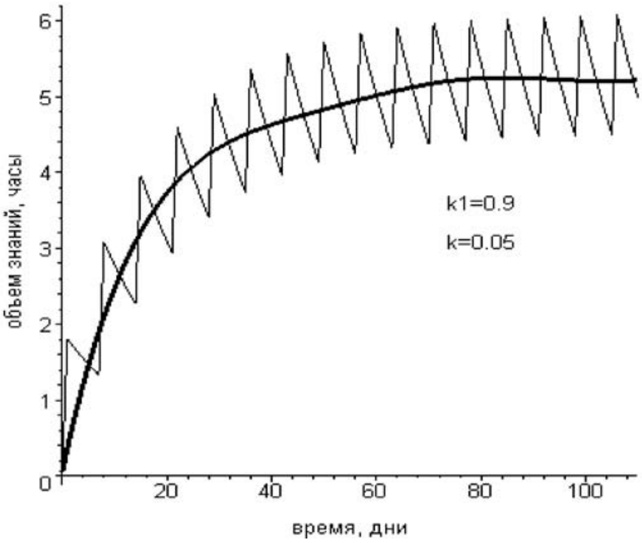



Рисунок 6 – Аппроксимированная кривая обучения, $k_0$ = 0,9, $k$ = 0,05

Из рисунков 3, 4 и 5 видно, что форма кривой обучения для непрерывного программного управления и аппроксимации кривой для кусочно-непрерывного программного управления (рисунок 6), полученных на основе математической модели (6), аналогична феноменологической классической кривой научения, описанной в источнике [8], представленной на рисунке 7. Таким образом, при любой равномерной нагрузке теоретически получается классическая кривая научения.

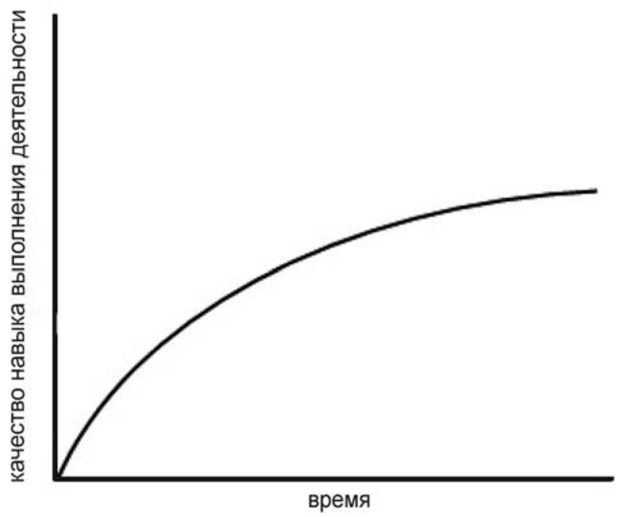



Рисунок 7 – Классическая кривая научения

Для устойчивого обучения необходимо обеспечить переход знаний у обучаемых из кратковременной памяти в долговременную. Это обеспечивается путем применения управления с обратной связью с постепенным уменьшением коэффициента забывания $k$ по некоторому закону

$$k(n) = f(n), \quad (8)$$

где $k(n)$ – коэффициент забывания для определенного объема материала, повторенного $n$ раз.

В первом приближении можно считать справедливой зависимость [9]:

$$k(n) = ke^{-n}. \quad (9)$$

При повторении также увеличиваются по некоторому закону все коэффициенты усвоения, стремясь к единице при достаточно большом числе повторений.

## 2. Методика определения коэффициентов усвоения и забывания

Теперь рассмотрим, каким образом рассчитываются коэффициенты математической модели обучения [10].

Коэффициент усвоения нового учебного материала при обучении с помощью преподавателя онлайн $k_0$ определяется как отношение учебного материала, усвоенного обучаемым $Z^I_{УП}$, к объему учебного материала $Z^I_П$, который был дан преподавателем онлайн

$$\mathrm{k}_0 = \frac{Z^I_{УП}}{Z^I_П}. \quad (10)$$

На практике сразу после лекции (семинара) онлайн обучаемый должен пройти специально разработанный тест, по результатам которого определяется усвоенный объем $Z^I_{УП}$ для каждого обучаемого.

Коэффициент усвоения при повторении $n$ раз объема, данного ранее преподавателем, $k_{1n}$ определяется с помощью формулы:

$$k_{1n} = k_0 + \Delta k_{1n}, \quad (11)$$

где приращение $\Delta k_{1n}$ определяется с помощью компьютерного моделирования; данное приращение может принимать значение от 0,1 до 0,005, уменьшаясь при стремлении соответствующего коэффициента усвоения к единице.

Коэффициент усвоения нового учебного материала при самостоятельном обучении $k_2$ рассчитывается как отношение объема учебного материала, усвоенного обучаемым $Z^{\mathrm{I}}_{УС}$, к объему учебного материала $Z^{\mathrm{I}}_C$, который был изучен самостоятельно

$$\mathrm{k}_2 = \frac{Z^{\mathrm{I}}_{УС}}{Z^{\mathrm{I}}_C}. \quad (12)$$

$Z^{\mathrm{I}}_{УС}$ определяется с помощью тех же тестов сразу после самостоятельного изучения обучаемым объема $Z^{\mathrm{I}}_C$. При этом целесообразно полагать, что

$$k_{3n} = k_2 + \Delta k_{3n}. \quad (13)$$

где $\Delta k_{3n}$ определяется с помощью компьютерного моделирования; данное приращение может принимать значение от 0,1 до 0,005, уменьшаясь при стремлении соответствующего коэффициента усвоения к единице.

Аналогично рассчитывается коэффициент усвоения нового учебного материала при обучении с помощью видеолекций

$$\mathrm{k}_4 = \frac{Z^{\mathrm{I}}_{УВ}}{Z^{\mathrm{I}}_B},$$

где $Z^{\mathrm{I}}_B$ – объем материала, поданный в виде видеолекций;

$Z^{\mathrm{I}}_{УВ}$ – объем учебного материала, усвоенный обучаемым на видеолекциях.

При этом целесообразно полагать, что

$$k_{5n} = k_4 + \Delta k_{5n},$$

где $\Delta k_{5n}$ определяется с помощью компьютерного моделирования; данное приращение может принимать значение от 0,1 до 0,005, уменьшаясь при стремлении соответствующего коэффициента усвоения к единице.

Коэффициент забывания $k$ рассчитывается из формулы (1) и равен

$$k = \frac{1}{t} \ln \frac{Z_0}{Z^I}, \quad (14)$$

где $Z_0$ определяется как усвоенный объем сразу после обучения.

$Z^I$ измеряется как остаточный объем знаний по прошествии времени $t$ (в сутках).

Таким образом, разработанная на основе теории управления математическая модель процесса обучения на дистанционном курсе имеет шесть видов управлений: программное управление, задаваемое в виде заранее запланированной нагрузки, осуществляемой преподавателем онлайн $u_0$, программное управление в виде нагрузки для самостоятельного обучения $u_2$, программное управление в виде просмотра обучаемым видеолекций, апробированных во время традиционного процесса обучения $u_4$, управление с обратной связью после обучения преподавателем онлайн (управление процессом повторения посредством контрольных и самостоятельных работ) $u_1$, управление с обратной связью при повторении материала, изученного обучаемым самостоятельно $u_3$, управление с обратной связью при повторении материала, изученного обучаемым в виде видеолекций $u_5$. На входе модель имеет следующие показатели: начальный объем знаний $Z_0$ (в академических часах), начальный коэффициент забывания $k$, постоянный коэффициент усвоения новых знаний при обучении с помощью преподавателя $k_0$; $k_1$ – начальный коэффициент усвоения для управления $u_1$; $k_2$ – постоянный коэффициент усвоения для управления $u_2$; $k_3$ – начальный коэффициент усвоения для управления $u_3$; $k_4$ – постоянный коэффициент усвоения для управления $u_4$; $k_5$ – начальный коэффициент усвоения для управления $u_5$. На выходе модель имеет такие показатели: текущий (конечный) объем учебного материала $Z$ (в академических часах), уменьшенный текущий (конечный) коэффициент забывания $k(n)$ в зависимости от числа повторений $n$ учебного материала, увеличенные коэффициенты усвоения для трех управлений: $k_i(n)$ , $i$ = 1, 3, 5.

**Заключение**

Таким образом, процесс обучения на дистанционном курсе можно описать с помощью неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dZ}{dt} = -kZ + \sum_{i=0}^{5} k_i u_i(t) .$$

Математические модели, описывающие процесс обучения, представлены в литературе достаточно широко. Однако эти модели имеют ряд недостатков.

Обычно авторы останавливаются на написании математических формул и не делают попыток решить данные уравнения аналитически или численно.

В математические уравнения процесса обучения не встроен процесс повторения обучаемым уже пройденного материала.

В моделях не учитываются физиологические свойства памяти, что негативно влияет на вид графиков обучения.

Главный недостаток математических моделей, которые описывали изменение информационной характеристики обучения с течением времени, в том, что в них нет в явном виде управления; это делает невозможным моделирование оптимального управления процессом обучения. Задача состоит в том, что система, представляющая дистанционный процесс обучения, должна быть управляема в том смысле, как это принято при оптимальном управлении техническими системами. Для того чтобы рассчитать оптимальное управление процессом накопления знаний студентов, необходима математическая модель обучения в виде дифференциального уравнения, в котором управление присутствует в явном виде.

Математическая модель обучения на дистанционном курсе на основе теории управления может быть полезна прежде всего педагогам. На основе коэффициентов усвоения и забывания, определенных с помощью специальных тестов, можно прогнозировать в некотором приближении уровень текущих знаний как отдельного обучаемого, так и группы или потока студентов. Таким образом, процесс обучения может контролироваться более точно по сравнению с традиционным подходом.

**Список использованных источников**


1. Республика Беларусь. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://gtmarket.ru/countries/belarus/belarus-info – Дата доступа: 07.08.2018.
2. Листопад, Н. И. Электронные средства обучения: состояние, проблемы и перспективы / Н. И. Листопад, Ю. И. Воротницкий // Высш. шк. – 2008. – № 6 – С. 6–14.
3. Растригин, Л. А. Адаптация сложных систем / Л. А. Растригин – Рига : Зинатне, 1981. – 375 с.
4. Жукович, С. Я. Математический метод управления процессом обучения на сетевом курсе / С. Я. Жукович, А. М. Седун, А. Э. Януш // Вестн. Белорус. гос. экон. ун-та. – 2008. – № 5. – С. 36–41.
5. Воронов, А. А. Теория автоматического управления / А. А. Воронов. – М. : Высш. шк., 1986. – 504 с.
6. Жукович, С. Я. Бизнес-процесс экспорта сетевых образовательных услуг в вузах / С. Я. Жукович, В. Я. Асанович // Вестн. Белорус. гос. экон. ун-та. – 2015. – № 1. – С. 46–52.
7. Жукович, С. Я. Математический метод управления процессом обучения на сетевом курсе / С. Я. Жукович, А. М. Седун, А. Э. Януш // Вестн. Белорус. гос. экон. ун-та – 2008. – № 5. – С. 36–41.
8. Крайг, Г. Психология развития / Г. Крайг, Д. Бокум. – 9-е изд. – СПб. : Питер, 2005. – 940 с.
9. Майер, Р. В. Кибернетическая педагогика: Имитационное моделирование процесса обучения / Р. В. Майер. – Глазов, ГГПИ, 2013. – 138 с.
10. Жукович С. Я. Математический метод повышения качества обучения в вузе / С. Я. Жукович // Вестн. Белорус. гос. экон. ун-та. – 2012. – № 5. – С. 36–42.


17.09.2018